SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 42

42

x

x'

MARZO 2003

SUMA 42

febrero 2003

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
Pablo Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
E. Palacián, J. Sancho, D. Sierra

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna,12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.800 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

SUMA 42
febrero 2003

Grupos de trabajo

EDITORIAL

EN EL EDITORIAL del anterior número de la revista hablábamos de la necesidad de mantener vivo el debate sobre los problemas que nos afectan, a participar en la discusión y en la elaboración de sus soluciones: esa es una de las principales finalidades de nuestros seminarios. La estructura de los seminarios persigue la participación de todas las sociedades que previamente a su realización han debido discutir un cuestionario previo, hacer sus propuestas y elegir a sus representantes. Durante los días que dura el seminario se discuten estas propuestas y se elabora un documento de conclusiones que se difunden a través de la revista. Alguna de las directrices de trabajo de la Federación van saliendo de las conclusiones de los distintos seminarios que se han ido realizando.

Sin embargo, hay algunos temas sobre los que es difícil establecer conclusiones y marcar metas más allá del corto o medio plazo. Un ejemplo lo tenemos en los seminarios sobre las reformas educativas: las conclusiones de los seminarios de Jaca, El Escorial o La Gomera se basaban en un currículo muy diferente al que ahora se implanta. La reunión de La Gomera ya nació con la idea de que era necesaria una cierta continuidad y con esa intención acaba de tener lugar la segunda edición del Seminario de Canarias de reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas, cuyas conclusiones esperamos poder publicar en el próximo número de SUMA.

El debate curricular no es el único tema que precisa una continua revisión: las olimpiadas, las nuevas tecnologías y, en general, todos los temas relacionados con la investigación en educación matemática, han ido evolucionando y lo seguirán haciendo y necesitarán un análisis y una reflexión que se extienda a través del tiempo. Para acometer este trabajo, la Federación se ha dotado de una nueva estructura organizativa, que complementa a los seminarios: los grupos de trabajo estables.

Se trata de formar grupos de personas, en general de diferentes sociedades, que trabajen en torno a un tema, siempre directamente relacionado con los objetivos y las líneas prioritarias de actuación fijadas por la Junta de Gobierno de la FESPM, que podría tanto dar continuidad al trabajo de un determinado seminario como iniciar el trabajo sobre un tema concreto. Las JAEM serán el lugar idóneo para que los grupos presenten a todos los socios los trabajos realizados y para el debate sobre sus documentos y conclusiones, y también para que otras personas interesadas en su línea de trabajo puedan integrarse en ellos. Los documentos y materiales que elaboren los grupos podrán difundirse a través de la revista SUMA o del Servicio de Publicaciones de la Federación.

En las conclusiones del seminario de La Gomera se pedía a la Federación la puesta en marcha de algún grupo de trabajo estable que continuase el debate allí iniciado, elaborando y difundiendo documentos que profundizasen en temas como el papel de los algoritmos o las matemáticas en la vida cotidiana y sus repercusiones en el currículo. También habían llegado a la Junta de Gobierno solicitudes de algunos socios que buscaban una estructura estable para trabajar conjuntamente sobre un tema. Atendiendo a esta demanda la Federación primero elaboró un protocolo sobre la creación de grupos de trabajo estable y posteriormente ha dado su placet a la puesta en marcha de los dos primeros.

El grupo de trabajo sobre la educación matemática en Primaria, que pretende debatir las metas, propósitos y contenidos de la educación matemática en esa etapa, analizar los currículos existentes tanto en las distintas comunidades del estado como en otros países y elaborar materiales curriculares de apoyo a la labor docente en esta etapa. El segundo grupo de trabajo se centrará en el papel de las Calculadoras en la Educación Matemática y para ello estudiará qué contenidos curriculares de las distintas etapas educativas ven favorecido su aprendizaje por el uso de las calculadoras, elaborará materiales para trabajar con la calculadora en los diferentes niveles educativos, favorecerá la investigación de aspectos relacionados con el aprendizaje matemático mediante el uso de tecnología de las calculadoras y colaborará a su difusión. Ambos grupos tienen el propósito de apoyar la formación continua del profesorado desde sus temas de estudio y de proporcionar un ámbito en el que compartir ideas, materiales y experiencias.

Esperamos disponer pronto de las primeras contribuciones de estos grupos y también que su constitución sirva para animar a otros colectivos a constituirse como gruupos de trabajo sobre otros temas de interés para todos.

SUMA 42
febrero 2003, pp. 5-11

¿Qué formación inicial reciben los profesores de Matemáticas de secundaria?

Francisco Gil Cuadra
Isabel Romero Albaladejo

ARTÍCULOS

El propósito de este trabajo es reflexionar sobre la formación inicial que reciben en la universidad nuestros futuros profesores de matemáticas de secundaria. En concreto, pretendemos realizar un primer acercamiento a algunos de los conocimientos, concepciones y creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje con los que los licenciados en matemáticas abandonan la universidad y se incorporan al mercado laboral, donde una de las salidas más importantes es la educación.

DENTRO DEL CAMPO de la formación de profesores se ha pasado por diferentes etapas, en las que el foco de interés se ha desplazado de unos aspectos a otros. En una primera etapa, se intentó identificar los comportamientos o las características de los buenos profesores partiendo de las opiniones de los alumnos. Ante la escasez de resultados obtenidos desde estos planteamientos, en la segunda etapa, se buscó relacionar las características y los comportamientos del profesor con el rendimiento de los alumnos; se perseguía identificar los factores que determinan la eficacia docente. La tercera etapa, llamada del pensamiento del profesor, se inició a partir de que los investigadores se interesaran por recoger información de los elementos que determinan la vida del aula: los procesos de pensamiento y toma de decisiones de los profesores, los procesos de aprendizaje de los alumnos, los contenidos, las relaciones personales, etc., para determinar las características de una enseñanza efectiva.

Esto supuso un cambio de planteamiento, al admitirse que los profesores son sujetos reflexivos y racionales que toman decisiones, emiten juicios y generan rutinas propias de su desarrollo profesional. Además, se aceptó que los pensamientos del profesor guían y orientan su conducta, y se comenzó a hablar del conocimiento profesional del profesor, como aquel que apoya y justifica las decisiones y acciones de trabajo de la enseñanza de las matemáticas (Llinares y Sánchez, 1990; Ponte, 1994). Surgen así una serie de trabajos que ponen de manifiesto la importancia de las concepciones y creencias de los profesores como factor determinante en la toma de decisiones, y la importancia de considerarlas en la formación de profesores (Gil, 2000).

En la Universidad de Almería se imparte la licenciatura de Matemáticas, y la mayoría de los estudiantes que la cursan terminan dedicándose a la enseñanza. Aun así, la presencia de asignaturas de Didáctica de la Matemática se reduce a dos optativas de 4,5 créditos (más unas Prácticas de Enseñanza financiadas por otro Plan). En el mejor de los casos, la formación didáctica que reciben los alumnos no supera el 3 % de los créditos del plan de estudios, que es muy similar a la del resto de universidades (Rico, 1999). El Plan pretende formar matemáticos con un fuerte dominio de los conceptos y procedimientos propios de la actividad matemática, dirigida ésta a la investigación y no a la enseñanza.

Sin embargo, a la vez que los futuros profesores reciben conocimientos, se les transmiten concepciones y creencias sobre la utilidad de la matemática y su forma de aprenderla y enseñarla. Con honrosas excepciones, la metodología a la que han sido expuestos durante su experiencia educativa es a menudo la de transmisión de conocimientos, siendo los estudiantes sus receptores pasivos. Como consecuencia, los estudiantes para profesor suelen tener en alta consideración a los profesores que comunican una imagen clara de las matemáticas, en forma de conferencias elegantes y concisas. La propia naturaleza de las Matemáticas contribuye a esta circunstancia, dada su naturaleza jerárquica y la larga sombra que el formalismo en las Matemáticas proyecta sobre su enseñanza.

En contraste, la mayoría de los movimientos de reforma abogan por un tipo de enseñanza orientada hacia los procesos, en la que la instrucción pone su énfasis en la comprensión de los alumnos, más que en la transmisión de unas matemáticas jerárquicas y predeterminadas. La cuestión es cómo hacer que los futuros profesores se replanteen sus puntos de vista, casi siempre implícitos, para considerar una visión de las Matemáticas más orientada a los procesos y más conectada con su utilidad y su relación con la vida, con las implicaciones que ello tiene para la enseñanza.

En un primer acercamiento a la cuestión mencionada, y en el contexto del comienzo de una asignatura de Didáctica de la Matemática de la licenciatura de Matemáticas, nos planteamos realizar una exploración sobre las concepciones y creencias de nuestros alumnos, como un elemento a considerar para determinar las acciones formativas que era preciso realizar con ellos. Para ello, aplicamos un cuestionario abierto, elaborado por Cooney y otros (1998), con vistas a obtener información acerca de las concepciones y creencias con que un grupo de estudiantes para profesor iniciaba su formación didáctica, después de haber cursado tres cursos de Matemáticas.

El cuestionario, en una primera parte, incidía en un tópico matemático considerado fundamental en la licenciatura. En concreto, nos referimos al concepto de función, el cual tiene además repercusiones en su futura vida profesional como profesores, pues es un contenido que se trata en la secundaria obligatoria y en el bachillerato. En una segunda parte, el cuestionario incidía en las creencias de los estudiantes para profesor sobre las Matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.

…a la vez que los futuros profesores reciben conocimientos, se les transmiten concepciones y creencias sobre la utilidad de la matemática y su forma de aprenderla y enseñarla.

Dicho cuestionario se aplicó a doce alumnos de último curso de la licenciatura de Matemáticas. A continuación, pasamos a resumir y comentar algunos de sus resultados.

Los conocimientos matemáticos de los profesores de secundaria en formación

En este apartado, nos vamos a ocupar de algunas de las preguntas sobre contenidos matemáticos que planteamos y de las respuestas obtenidas.

Cuando se preguntó a los estudiantes para profesor «¿qué es una función?», once de ellos dieron una definición de función y uno no. Los tipos de definición que aparecieron pueden clasificarse en:

- Definición de función como aplicación entre conjuntos (seis casos).
- Definición de función como relación entre conjuntos (tres casos).
- Definición de función como relación entre variables (un caso), cita la utilidad de las funciones para modelar fenómenos experimentales.
- Una «modelización de cualquier fenómeno físico, económico…, lo cual permite expresar de una manera correcta este fenómeno» (un caso).

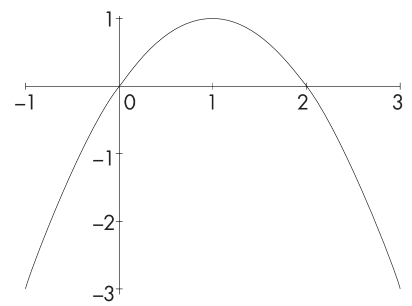
La casi totalidad de los estudiantes recurren, pues, a una definición formalista de función, puramente abstracta, en detrimento de aproximaciones que doten de más sentido la definición para sus futuros alumnos y la conecten con experiencias reales. Sólo en dos casos se alude a la modelación de fenómenos, aunque sin especificar qué tipo de fenómenos son aptos para ser modelizados por el concepto de función.

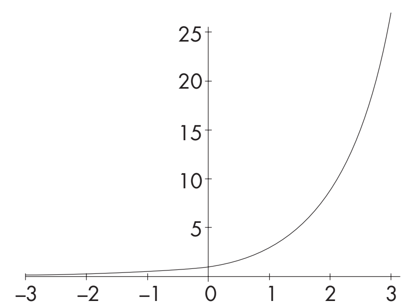
En la siguiente pregunta planteada, la totalidad de los estudiantes encuestados resolvieron correctamente la ecuación $4 - x = 2x + 3$ usando métodos algebraicos (transposición de términos y despeje de la variable). En once casos se aportan métodos alternativos, cuatro por ensayo y error (dando valores a la x) y siete por métodos geométricos.

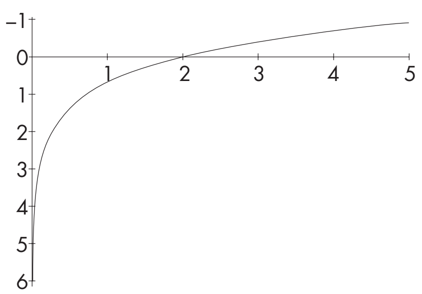
Cuando se les pidió que resolvieran las ecuaciones $2^x = 128$, $3^x = 309$, nueve de ellos resuelven las dos y los tres restantes resuelven sólo la primera. El procedimiento utilizado para la primera ecuación consiste en emplear la inyectividad de la función exponencial, previa descomposición en factores primos de 128. En los tres casos en que no se resuelve la segunda ecuación no se usa la función logarítmica de base 3. Uno, incluso, afirma que esta ecuación no tiene solución.

Ninguno de los doce estudiantes se plantea la posibilidad de dar una solución aproximada a la segunda ecuación, aun cuando éste es un contenido de la ESO.

A continuación se les pidió que escribieran situaciones que razonablemente representaran los siguientes gráficos:







Es especialmente significativo el hecho de que la mitad de estudiantes ni reconocen las funciones ni son capaces de poner ejemplos.

Aunque no se pedía explícitamente que identificaran las funciones, en ocho casos se plantearon el reconocimiento de las funciones representadas con los siguientes resultados:

- En 6 casos se reconocen correctamente las funciones, desde un punto de vista estrictamente cualitativo, es decir, se indica de qué «familia» es cada una de ellas. Se afirma que la primera es una parábola (o función cuadrática), la segunda una exponencial y la tercera una logarítmica. No se dan las expresiones algebraicas de las funciones en ningún caso.
- En los dos restantes se dan descripciones muy vagas de algunas.

En cuanto a dar situaciones para cada una de las gráficas, los resultados obtenidos son:

- Primera gráfica. Se dan situaciones para esta gráfica en cinco casos. Las situaciones sugeridas son: aceleración y deceleración de un corredor, trayectoria de un proyectil u otro objeto, movimiento uniformemente acelerado y oscilación de ventas de un determinado producto.
- Segunda gráfica. Se dan situaciones para esta gráfica en seis casos. Las situaciones sugeridas son: aumento espectacular de una inversión en un período de tiempo, sudoración corporal en función de la temperatura, desarrollo de alguna población animal en ausencia de depredadores o bajo protección, velocidad de un coche que aumenta con el tiempo hasta estabilizarse, previsión de ventas de una mercancía y consumo de energía eléctrica en una casa.
- Tercera gráfica Se dan situaciones para esta gráfica en cinco casos. Las situaciones sugeridas son: crecimiento de producción de una sustancia, evolución de un tumor en función de la cantidad de un cierto fármaco administrado al paciente, objeto que hundimos en el agua y va subiendo a la superficie, resurgir de una empresa que estaba al borde de la quiebra, déficit o superávit de una empresa (en millones) en función del tiempo transcurrido.

En la mayoría de las respuestas se aprecia vaguedad o falta de precisión al ajustar el fenómeno a la gráfica. Por otra parte, no se dan situaciones para ninguna de las gráficas en seis casos, que son los que no identificaron las funciones o lo hicieron de manera muy vaga. Es especialmente significativo el hecho de que la mitad de estudiantes ni reconocen las funciones ni son capaces de poner ejemplos.

Por último, se pidió a los estudiantes que describieran una situación en la que usasen matemáticas la semana anterior. Las respuestas obtenidas fueron las siguientes:

- Ayuda a amigos estudiantes de secundaria.

- Para calcular porcentajes de precios (2).
- Evaluar relaciones calidad-cantidad-precio en diferentes marcas de un mismo producto (2).
- Para comprar la mínima tela posible a fin de confeccionar unas cortinas, un mantel y unos cojines.
- Cálculo de precios en euros (2).
- Ayuda a una amiga en cálculos para estudiar la conveniencia o no de un cierto crédito.
- Entender por qué al hacer una labor de cadeneta de forma circular, en cada vuelta concéntrica hay que aumentar el número de puntos.
- Ayuda a amigos o parientes pequeños en el aprendizaje de las tablas de multiplicar.
- Al hacer la compra, estimar si el presupuesto disponible es suficiente para lo que hay que comprar.
- Medida de una pared para saber si cabe un armario.
- Continuamente, como estrategia de resolución de problemas cotidianos.

Como vemos, el uso que se hace de las Matemáticas implica operaciones numéricas básicas, medidas simples, algunas estimaciones (para las que los estudiantes no han sido específicamente instruidos en su formación académica), ayuda a otros para resolver cuestiones escolares y respuestas vagas en torno a «problemas cotidianos». De este modo, las matemáticas que conectan con su vida diaria no pasan de niveles elementales; los conceptos más sofisticados tienen sentido únicamente en el ámbito académico y en un círculo cerrado, para abastecer las propias necesidades del edificio matemático abstracto.

En suma, al igual que los alumnos americanos, encuestados por Cooney, Wilson, Albright y Chauvot, nuestros estudiantes para profesor manifiestan un mayor conocimiento académico de las Matemáticas que de las aplicaciones que lo generan o de sus relaciones. Parece que el conocimiento matemático que poseen es insuficiente para adaptar distintos conceptos o ideas matemáticas a contextos que sean significativos para sus futuros alumnos, así como para establecer conexiones explícitas y ajustadas con las aplicaciones de dichos conceptos. Sólo a través de estas conexiones se trascendería el mero conocimiento general e informativo acerca de situaciones que los conceptos matemáticos podrían representar, y que parecen justificar superficialmente su inclusión en el currículo, para ser capaces de dotarlos de sentido fuera del contexto formal. Creemos que este nivel de conocimiento matemático afecta a la habilidad de los futuros profesores para desarrollar estrategias óptimas que les permitan enseñar las Matemáticas del currículo de secundaria.

…las matemáticas que conectan con su vida diaria no pasan de niveles elementales; los conceptos más sofisticados tienen sentido únicamente en el ámbito académico y en un círculo cerrado, para abastecer las propias necesidades del edificio matemático abstracto.

Las creencias sobre la enseñanza de las Matemáticas de los profesores de secundaria en formación

Cuando se planteó a los estudiantes que compararan el aprender Matemáticas con las siguientes actividades:

- trabajar en una cadena de montaje;
- hacer un rompecabezas;
- ver una película;
- realizar un experimento;
- cocinar con receta;
- construir una casa;
- coger fruta de un árbol;
- modelar una escultura de barro;

y que determinaran el mejor y el peor símil, respondieron, como mejor símil:

- Construir una casa (ocho casos). Por las siguientes razones:
  - — Porque los nuevos conocimientos deben asentarse sobre los previos, a modo de cimientos (cinco casos).
  - — Porque «hay que hacerlo poco a poco y cada uno podemos experimentar dentro de unos límites lo que queremos pero al final todos obtenemos lo mismo» (un caso).
  - — Porque se van adquiriendo conocimientos útiles para toda la vida. «La casa que construimos es la mente del alumno que cada año se ha de mejorar» (un caso).
  - — Porque se necesitan ciertos materiales (axiomas o «conceptos establecidos») y a partir de ellos construimos distintas teorías (casas) que siempre tienen elementos en común (un caso).
- Modelar una escultura de barro (dos casos). Porque se parte de unos pocos axiomas aceptados (trozo de barro) y, a partir de ellos ,se van construyendo estructuras y

deduciendo propiedades (proceso de moldeado); porque tanto el arte del modelado como las matemáticas constituyen formas de expresión humana.

- Trabajar en una cadena de montaje (un caso). Porque todos los conceptos acaban siendo relacionados y los usamos e introducimos para ideas posteriores. Es necesario que sean entendidos.
- Hacer un rompecabezas (un caso). Porque las matemáticas tienen una estructura abierta similar a un puzzle en el que vamos añadiendo piezas que encajan con las precedentes.

Vemos como todos los estudiantes insistieron, de una manera u otra, en la necesidad de una fuerte fundamentación del aprendizaje, así como en el carácter estructurado y progresivo de las Matemáticas.

Como peor símil, los futuros profesores escogieron:

- Cocinar con receta (seis casos). Porque no debe ser un proceso mecánico, hay que pensar (cinco casos) y porque «que una vez algo se haya entendido en una clase, por explicarlo de una forma, no significa que siempre sea así» (un caso).
- Trabajar en una cadena de montaje (cuatro casos). Porque no es un proceso monótono, mecánico (tres casos), y porque es un proceso en el que las actividades que lo componen están relacionadas entre sí (un caso).
- Ver una película (un caso). Porque si al alumno no le agrada el principio de una película, ni siquiera sigue viéndola, luego no es una buena estrategia para aprender matemáticas.
- Construir una casa (un caso). Porque la adquisición del conocimiento no es lineal, aditiva. El conocimiento de un concepto matemático no es estático, sino que evoluciona.

Aquí podemos observar principalmente como a nuestros estudiantes les despierta rechazo el que las matemáticas se puedan concebir como un proceso mecánico, monótono, que se realice sin sentido y sin comprensión por parte de los sus alumnos. Parece preocuparles el inducir a sus alumnos a pensar, a establecer relaciones y a evolucionar en el proceso de adquirir conocimientos matemáticos.

Además, se les pidió una caracterización de un buen alumno. Se registraron los siguientes rasgos: capacidad de razonamiento (6), crítico (5), afán de superación (4), curioso (3), creativo (3), intuitivo (3), trabajador (3), capacidad de abstracción (2), riguroso (2), audaz (1), capacidad de inferencia (1) y capacidad de transmitir sus conocimientos (1).

A nuestro parecer, los encuestados identifican las cualidades que consideran propias de los matemáticos profesionales (los investigadores en matemáticas), y que son las que a ellos les gustaría tener, con las cualidades que caracterizarían a un buen alumno de Matemáticas de secundaria. Respuestas a preguntas posteriores mostrarán que, como futuros profesores, los encuestados consideran que tienen responsabilidad sobre el desarrollo de estas cualidades en sus alumnos; lo que no sabemos es hasta qué punto ellos las tienen desarrolladas, si consideran que las tienen y si sabrían cómo fomentarlas.

…los encuestados identifican las cualidades que consideran propias de los matemáticos profesionales (los investigadores en matemáticas), y que son las que a ellos les gustaría tener, con las cualidades que caracterizarían a un buen alumno de Matemáticas de secundaria.

Al caracterizar a alguien que no sirva para las matemáticas dieron los siguientes rasgos: desinteresado o despistado (6), acrítico (4), incapaz de aplicar conceptos conocidos (3), memorizador (2), derrotista (1), cerrado (1) y todos sirven para las matemáticas, pero hay que saber motivarles (2).

Llama la atención el énfasis en el interés y en la motivación, aunque no sabemos qué estrategias de motivación propondrían y cómo interpretarían el contraste con la práctica.

También se pidió a los estudiantes para profesor que consideraran las siguientes similitudes: Un profesor de matemáticas es como un…

- locutor de noticias de la radio;
- artista;
- médico;
- director de orquesta;
- jardinero;
- entrenador.

Eligieron como mejor símil:

- Entrenador (siete casos). Porque prepara a sus alumnos para el futuro, obteniendo progresivamente mejores resultados (cinco casos), y porque favorece en cada alumno el desarrollo de las capacidades que le resultan menos asequibles (dos casos).

- Director de orquesta (cuatro casos). Porque debe dirigir y orientar el aprendizaje de los alumnos, y favorecer su aprecio por la materia (tres casos), y porque, igual que el director, utiliza todos los medios a su alcance para hacer sonar una buena música; el profesor tiene que saber utilizar sus conocimientos para transmitirlos con la mayor claridad posible (un caso).
- Jardinero (un caso). Porque «debe plantar conocimientos en los alumnos, cuidarlos, dejar que nazcan ideas y conclusiones y luego ir modelándolos y cuidándolos, quitando las malas hierbas y dejando lo mejor».

En general, se aprecia en los símiles elegidos por los estudiantes y en sus comentarios un interés en cuidar de sus futuros alumnos y fomentar sus capacidades y cualidades matemáticas, así como el aprecio por la materia. También salen a la luz el interés por la efectividad y la obtención de buenos resultados formativos y, en algún caso, se trasluce la preocupación por la transmisión clara a la que aludíamos al principio del artículo.

Como peor símil escogieron:

- Locutor de noticias de radio (once casos). Porque se limita a contar sus conocimientos, sin favorecer la comunicación con los alumnos y su participación (ocho casos), porque la labor del profesor no es simplemente «transmitir», sino enseñar (un caso), porque el profesor no debe asumir un papel protagonista (un caso) y porque el profesor debe favorecer en los alumnos su «afición» al razonamiento, por imitación de su propia conducta y no puede limitarse a ser un narrador (un caso).
- Médico (un caso). Porque «no creo que haya nada que curar, sólo hay que intentar enfocarlo de otra forma».

Una vez más, se constata el protagonismo que confieren los encuestados a sus futuros alumnos y su preocupación por la comunicación, la participación, la interacción. Es muy significativo el hecho de que su centro de atención se haya trasladado desde al profesor a los alumnos y que se rechace un aprendizaje pasivo.

Cuando se pidió a los encuestados que dieran caracterizaciones del buen profesor, respondieron:

Un buen profesor de matemáticas: es motivador (5), permite y alienta la participación del alumno en la clase (5), reflexiona sobre su labor docente y tiene afán de superación (5), fomenta el espíritu crítico en los alumnos (3), es claro (2), comprensivo (2), está motivado por la enseñanza (1), es creativo (1), paciente (1), preciso (1), ordenado en sus desarrollos (1), y trabajador (1).

De nuevo, observamos el gran interés de los estudiantes para profesor por la motivación, por fomentar la participación e implicación de los alumnos y por lograr un buen ambiente de aula, así como por ser profesionales eficientes en la enseñanza de la materia y por tener afán de evolución y superación. Las cualidades personales que se mencionan corroboran asimismo estos centros de interés.

…se ha podido constatar que rechazan la idea de un aprendizaje mecánico y monótono, y que centran su interés en fomentar la comprensión, en la línea de lo estipulado por los nuevos planteamientos en educación matemática y en educación en general.

En suma, por lo que respecta a las creencias de los estudiantes para profesor sobre el aprendizaje de las Matemáticas, se ha podido constatar que rechazan la idea de un aprendizaje mecánico y monótono, y que centran su interés en fomentar la comprensión, en la línea de lo estipulado por los nuevos planteamientos en educación matemática y en educación en general. Ahora bien, su insistencia en el carácter estructurado y fuertemente fundamentado de las Matemáticas parece apuntar a que sus concepciones sobre la comprensión matemática están más cerca de una visión platónica de la misma que de la resolución de problemas, la investigación sobre situaciones abiertas, o la búsqueda de implicaciones con sus vidas y con su entorno.

Por lo que respecta a la enseñanza de las Matemáticas, nuestros estudiantes para profesor manifiestan un marcado interés por sus alumnos, en un doble sentido. Por una parte, se muestran deseosos de fomentar el interés, la participación activa y la motivación en dichos alumnos; por otra parte, se sienten responsables de su formación matemática y de fomentar en ellos cualidades y rasgos que les permitan obtener buenos resultados en la materia en cuestión. Quedaría por clarificar qué entienden los estudiantes para profesor por buenos resultados, aunque todo apunta a que estarían directamente relacionados con su visión de la comprensión matemática tal como la han esbozado en respuestas a preguntas anteriores.

Conclusiones

Aunque hay variaciones entre los estudiantes encuestados, podemos encontrar en ellos rasgos comunes significativos que merece la pena destacar. En general, nuestros estudiantes para profesor muestran un gran interés por el aprendizaje matemático de sus alumnos, y asumen la responsabilidad por crear un ambiente de aprendizaje cómodo, motivador y, sobre todo, participativo, donde el protagonismo pertenece a sus alumnos y el centro de atención está situado en ellos.

Nuestros estudiantes ponen de manifiesto, asimismo, una visión de las Matemáticas como un cuerpo estructurado de conocimiento que se construye sobre la base del conocimiento anterior. Las Matemáticas son algo que hay que entender, no que memorizar. El aprendizaje rutinario y repetitivo ha de ser evitado. Sin embargo, aunque estos estudiantes proceden de una formación académica exclusivamente matemática a nivel superior, no parecen preparados para establecer conexiones entre los conceptos matemáticos y aplicaciones prácticas o situaciones que los doten de sentido fuera del formalismo matemático; a lo sumo, al intentar contextualizar, se quedan en el nivel de las generalidades o en el de situaciones triviales que pueden ser resueltas con conocimientos matemáticos elementales. Esto va en detrimento de la calidad de la educación matemática que podrán proporcionar a sus futuros alumnos, por una parte, pero además, dificulta el que el futuro profesor pueda crear un ambiente de aprendizaje estimulante y significativo, a pesar de lo que parece constituir un sincero interés por su parte.

Los métodos de enseñanza con los que nuestros estudiantes para profesor han aprendido las Matemáticas fomentan una concepción de ellas como un cuerpo estructurado y formalizado de conocimientos (visión platónica), la cual se contrapone a la visión de la Matemática como un campo de exploración y de resolución de problemas que se potencia en los actuales currículos. Esto constituye un obstáculo para los nuevos planteamientos educativos, pues los profesores somos proclives a enseñar siguiendo los mismos métodos por los que fuimos enseñados, y romper con esta inercia requiere conocer y vivir una forma diferente de saber, de aprender y de enseñar Matemáticas.

En general, nuestros estudiantes para profesor muestran un gran interés por el aprendizaje matemático de sus alumnos, y asumen la responsabilidad por crear un ambiente de aprendizaje cómodo, motivador y, sobre todo, participativo, donde el protagonismo pertenece a sus alumnos y el centro de atención está situado en ellos.

En este sentido, consideramos necesario revisar la preparación no sólo pedagógica, sino también matemática, de los futuros profesores de secundaria, de manera que dote a los estudiantes para profesor de herramientas suficientes para afrontar su futura labor. Dicha preparación debería capacitarlos para realizar sus aspiraciones de crear un ambiente motivador y participativo para sus futuros alumnos, a la vez que conseguir que éstos aprendan matemáticas de forma efectiva. Por ello, en nuestra asignatura, las acciones formativas van encaminadas a que los estudiantes para profesor se cuestionen su visión de las Matemáticas y sus propios conocimientos matemáticos; pretendemos que sientan la necesidad de establecer conexiones ricas entre las distintas ramas de las matemáticas, y entre las matemáticas y la fenomenología que le da origen y sobre la que tiene aplicación.

Entre dichas acciones formativas podemos señalar: el análisis de incidentes críticos en los que subyacen problemas de motivación de los alumnos; el planteamiento de situaciones donde entre en conflicto la eficacia del conocimiento matemático que poseen; el conocimiento de los problemas históricos que originaron los conceptos matemáticos, de los modelos y las representaciones de dichos conceptos, los materiales y recursos que pueden utilizarse, y de las dificultades y errores que pueden surgir en el aprendizaje.

Francisco Gil
Isabel Romero
Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales.
Universidad de Almería

Bibliografía

COONEY, T., P. WILSON, M. ALBRIGHT y J. CHAUVOT (1998): «Conceptualizing the Prrofessional Development of Secondary Preservice Mathematics Teacher», *Paper presented at the Annual meeting of the AERA.*

GARCÍA, M. (1997): *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*, GIEM, Sevilla.

GIL, F. (2000): *Marco Conceptual y Creencias de los Profesores sobre la Evaluación en Matemáticas*, Universidad de Almería, Almería.

LLINARES, S. y M.V. SÁNCHEZ (1990): *Teoría y práctica en Educación Matemática*, Alfar, Sevilla.

PONTE, J. (1994): «Mathematics teachers' professional knowledge», *Proceeding XVIII PME*, Lisboa.

RICO, L. (1999): «Matemáticas, Universidad y Formación del Profesorado», *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, n.° 34, 245-262.

SHULMAN, L. (1986): «Those who understand: knowledge growt in tecahing», *Educational Research*, n.° 15 (2), 4-14.

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Comisión Ejecutiva

Presidente: Florencio Villarroya
Secretario General: José Luis Álvarez García
Vicepresidente: Serapio García
Tesorera: Claudia Lázaro

Secretariados:
Prensa: Antonio Pérez Sanz
Revista SUMA: Emilio Palacián/Julio Sancho
Relaciones internacionales: Carmen Azcárate/Luis Balbuena
Actividades: Xavier Vilella Miró
Publicaciones: Ricardo Luengo González

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Marta Berini López-Lara
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Xaro Nomdedeu Moreno
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12.
50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidenta: Dolores de la Coba
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Constantino de la Fuente
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n.
09006-BURGOS

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006-ALBACETE

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidenta: Remedios Peña Quintana
IES Francisco de Goya. C./ Caravaca, s/n.
30500-MOLINA DE SEGURA (Murcia)

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Ricardo Padrón
Apartado de Correos 103.
SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 590. 06080-BADAJOZ

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: Carmen da Veiga
C/ Limonero, 28
28020-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Begoña Martínez Barreda
CPR de Santander. C./ Peña Herbosa, 29.
39003-SANTANDER

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidenta: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y HUmanidades
Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005-MELILLA

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra.
31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 305. Facultad de Educación.
Universidad Complutense. 28040-MADRID

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004-LOGROÑO

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
Apartado 4188. 15080-A CORUÑA

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica.
Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 42
febrero 2003, pp. 13-22

Geometría para futuros profesores de primaria: experiencias con el tangram chino

María Teresa Fernández Blanco

Este artículo tiene como objetivo presentar una experiencia sobre Didáctica de la Geometría llevada a cabo en la Facultad de Ciencias de la Educación de Santiago de Compostela con alumnos de la especialidad de maestro en Educación Primaria.
En ella se utilizó un juego de disección (el tangram chino) como base para la realización de una serie de actividades que tienen un objetivo múltiple: concienciar a los alumnos sobre las ventajas del uso de un material manipulativo para el estudio de propiedades geométricas; desarrollar diversas formas de razonamiento matemático; analizar la validez de la comprobación frente a la demostración en diversas situaciones; confrontar las concepciones previas de los alumnos con los resultados de las experimentaciones.

ARTÍCULOS

EN LA OBRA *Mathematical Recreations and Essays*, W.W. Rouse Ball escribía:

> La formación de diseños mediante siete piezas de madera... conocidas por tans... es uno de los pasatiempos más antiguos del Oriente. Son centenares las figuras que es posible construir, que remedan hombres, mujeres, pájaros, bestias, peces, casas, barcos, objetos domésticos, dibujos, etc. Pero este tipo de tareas, aunque recreativas, no tienen carácter matemático, por lo que a mi pesar, me contentaré con mencionarlas de pasada.

En contradicción con la opinión que Ball manifestaba en la anterior cita, se presentan en este trabajo una serie de actividades de carácter matemático cuyo soporte material es precisamente el conjunto de esas siete piezas de madera conocidas por tans.

Los tangrams forman parte del grupo de juegos de disección, de cuyo estudio se ocupa una de las ramas más antiguas de la matemática recreativa y el que utilizamos en esta experiencia es quizás el más conocido de todos: el tangram chino. Los tans se obtienen dividiendo un cuadrado en siete piezas (figura 1): dos triángulos grandes, dos pequeños, uno mediano, un cuadrado y un romboide.

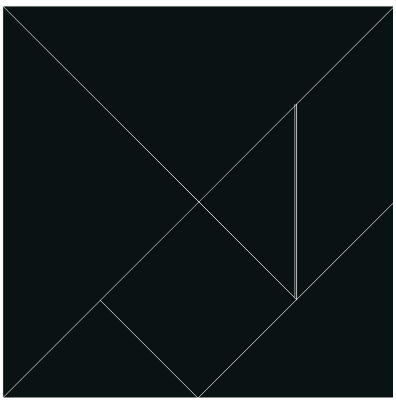


Figura 1

Esta disección no se hace de manera arbitraria: como se aprecia en la figura, las líneas son trazadas de forma que los tans guardan entre sí una serie de relaciones geométricas que describimos a continuación:

- todos los vértices tienen ángulos múltiplos de 45°;
- todas las piezas contienen al triángulo pequeño un número entero de veces;
- si tomamos como unidad de longitud un cateto del triángulo pequeño, los lados de los diversos tans serán 1, 2, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.

Este juego nació como pasatiempo y su principal objetivo era la formación de diseños, conocidos con el nombre de *tangramas*, la única restricción que tenía era que todos los tangramas se construían utilizando todas las piezas (figura 2). Esta particular disección va a condicionar la construcción de los tangramas, de manera que para algunas figuras tendremos varias posibilidades, mientras que otras tendrán una única solución e inluso nos encontraremos con figuras imposibles de realizar utilizando únicamente los siete tans (pese a que existen libro publicados que contienen más de mil figuras distintas). A pesar de la sencillez del juego, la construcción de tangramas requiere un alto grado de intuición geométrica y de creatividad.

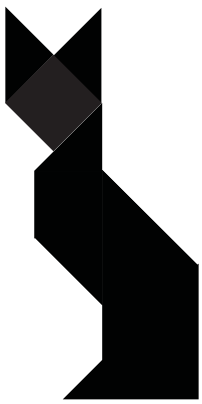


Figura 2

Los juegos con tangrams pueden agruparse en las siguientes categorías (Gardner, 1988):

1. Búsqueda de una o varias maneras de construir un tangrama dado o, en su defecto, de una demostración elegante de la imposibilidad de su construcción.
2. Encontrar la manera de representar, de la forma más artística o humorística, o de ambas, siluetas de animales, figuras humanas u otros objetos reconocibles.
3. Resolución de problemas de geometría combinatoria que son planteados tomando como base los siete tans y sus relaciones.
4. Diseño de juegos competitivos que requieran uno o más conjuntos de tans.

…utilizaremos el tangram como recurso y material didáctico para la introducción y formación de conceptos geométricos, con el fin de que afloren las concepciones previas que tienen los alumnos sobre distintos conceptos matemáticos, para reforzar conocimientos y conductas correctas y a su vez evitar obstáculos que condicionarían y en algún caso impedirían un aprendizaje posterior, para desarrollar habilidades y procesos…

Obviamente, de las cuatro categorías anteriores la más interesante desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas es la tercera, aunque el trabajo con este material no debería excluir las otras, ya que la manipulación de las piezas con fines lúdicos puede servir para que los alumnos se familiaricen con sus formas, sus medidas y otras características propias de cada tan. Problemas del tipo de «¿cuántos polígonos convexos diferentes podemos formar con los siete tans?» pertenecerían a dicha categoría. El uso que daremos en esta ocasión al tangram no está contenido formalmente en ninguna de las categorías anteriores, si bien en algún momento se plantearán problemas con posibilidades combinatorias como el descrito más arriba.

Nosotros utilizaremos el tangram como recurso y material didáctico para la introducción y formación de conceptos geométricos, con el fin de que afloren las concepciones previas que tienen los alumnos sobre distintos conceptos matemáticos, para reforzar conocimientos y conductas correctas y, a su vez, evitar obstáculos que condicionarían y, en algún caso, impedirían un aprendizaje posterior, para desarrollar habilidades y procesos, etc. Los conceptos y habilidades geométricas serán el núcleo del objetivo que se quiere perseguir, pero sin olvidarnos de la Medida e incluso de los Números que aparecerán de una manera natural, ayudando de este modo a relacionar distintos bloques de la matemática que habitualmente se mantienen diferenciados.

Conviene aclarar que el planteamiento, desarrollo y objetivo del trabajo realizado con este material sería distinto si se tratara de alumnos de primaria o infantil. La regla básica del tangram consiste en utilizar siempre los siete elementos, sin embargo, con niños pequeños se puede simplificar su uso utilizando solamente algunas de las piezas. En los primeros ciclos educativos interesa resaltar, sobre todo, el reconocimiento de formas geométricas, realizar giros y desplazamientos de figuras y desarrollar la creatividad (Cascallana, 1988). Por otra parte, los alumnos de esta experiencia educativa son futuros profesores de primaria y, como consecuencia de su paso por los distintos niveles educativos, tienen adquiridas concepciones previas (algunas erróneas) que serán difíciles de modificar, ampliar o incluso abandonar; pero cuyo análisis y, en algún caso, contraste con los resultados obtenidos servirá para enriquecer y ampliar los objetivos previos de las actividades propuestas.

Metodología

La metodología seguida en el desarrollo de esta experiencia está basada en la «estructura de laboratorio», es decir, enfocada como una actividad investigadora sobre la construcción de conceptos, resolución de problemas, técnicas de colaboración, etc. poniendo énfasis en la formación de conceptos y en la forma de adquirirlos. Bajo esta situación, el alumno construye sus propios conocimientos y el profesor se convierte en «promotor» de la investigación, presentando, organizando y guiando el trabajo (Alsina, Burgués y Fortuny, 1987).

La clase se organiza en grupos reducidos (cuatro alumnos como máximo en cada uno) con lo que se busca que los alumnos expongan sus ideas dentro del mismo e interaccionen con sus compañeros. El debate y el contraste de resultados con los demás grupos y con el profesor enriquecerá la situación y ayudará a consolidar y establecer conclusiones.

Apelando al dicho «la geometría se hace con las manos», primeramente dejamos que manipulen los siete tans y que intenten formar un cuadrado con todas las piezas como toma de contacto con el material. Posteriormente, se iniciará la experiencia propiamente dicha en la que plantearemos a los alumnos varias actividades, alguna de las cuales se presenta más adelante con detalle, en la que se pretende tratar multitud de contenidos matemáticos entre los que destacamos los siguientes:

La metodología seguida en el desarrollo de esta experiencia está basada en la «estructura de laboratorio»…

- Triángulos. Clasificación.
- Cuadriláteros. Clasificación.
- Triángulos semejantes.
- Triángulos congruentes.
- Altura de un triángulo.
- Teorema de Pitágoras.
- Concepto de polígono.
- Elementos de un polígono.
- Clasificación de polígonos.
- Notación.
- Ángulos.
- Perímetro.
- Superficie. Unidad de área.
- Números irracionales.
- Razonamiento por inducción.
- Ejes de simetría de una figura.

Descripción de las actividades

Presentaremos de forma más detallada en este documento seis de las actividades que componen esta experiencia, en las cuales se sigue la formulación propuesta por Ángel Álvarez (1996) y que servirán como ejemplos de lo expuesto en la introducción. De esta forma, en algunas de ellas se introducen y amplían conceptos, en otras se desarrollan habilidades y destrezas, y en las restantes se procura combinar ambos elementos. Una característica que se puede observar en algunas de ellas es que no son planteadas como cuerpos cerrados y disjuntos sino que son retomadas y replanteadas con posterioridad (a partir de nuevos conceptos tratados o nuevos resultados obtenidos), lo que obliga a veces a ampliar los resultados o las conclusiones obtenidas con anterioridad, es decir, el desarrollo de la actividad no es lineal, con una actividad tras otra, sino que podría definirse como un recorrido en espiral (se vuelven a tratar actividades anteriores desde otro punto de vista y se analiza la influencia de los nuevos resultados o conceptos sobre conclusiones obtenidas en ellas). Este es el caso de la clasificación de las piezas del tangram que, a pesar de ser la primera de las actividades propuestas, a lo largo del desarrollo de las demás se irá enriqueciendo y ampliando por la aparición de nuevos criterios de clasificación.

En cada una de las actividades se distinguirán los objetivos que se pretenden conseguir, las dudas y problemas concretos que surgen en su desarrollo y que provocan a menudo que la tabla de contenidos planteada *a priori* se amplíe (reafirmando este hecho la influencia del alumno sobre su aprendizaje) y, por último, un breve resumen del desarrollo de la actividad.

Actividad 1

¿Qué forma tienen las piezas del tangram? Clasifícalas según distintos criterios.

En geometría una de las tareas propuestas con más asiduidad a los alumnos es la de clasificar los elementos de un conjunto determinado (basta observar que los libros de geometría de primaria y primeros cursos de secundaria contienen multitud de estas clasificaciones: de ángulos, de líneas, de polígonos, de triángulos...). La importancia de una clasificación radica no sólo en obtener una partición de un conjunto sino en conocer las características y propiedades de los elementos de dicho conjunto, de manera que el realizar estas actividades atendiendo a distintos criterios nos permitirá conocer mejor dichos elementos. Así mismo, es interesante ver cómo algunos de los criterios elegidos por los alumnos en un principio pueden no dar lugar a clasificaciones interesantes por múltiples causas: la relación escogida no es de equivalencia, todas las figuras están en una misma clase de equivalencia o incluso cada elemento compone su propia clase.

También llama la atención a los alumnos el hecho de que criterios aparentemente distintos (como la existencia de diagonales y el número de lados) dan a veces lugar a clasificaciones idénticas (en este caso en triángulos y cuadriláteros), lo que sirve para introducir distintas caracterizaciones de los polígonos (por su número de lados o de diagonales, por ejemplo).

Objetivos

- Obtener distintos criterios para clasificar triángulos.
- Distinguir criterios que permiten clasificar de los que no.
- Comprender la noción de partición de un conjunto.
- Clasificar cuadriláteros. Aquí aparece un elemento nuevo, las diagonales, que nos van a ampliar el número de criterios para hacer esa clasificación y que, como consecuencia, enriquecerán el conocimiento de los polígonos en general.
- Diferenciar entre triángulos semejantes y congruentes.

Principales dudas

- Posibilidad de que un triángulo pueda ser, por ejemplo, rectángulo e isósceles. El hecho de que duden sobre esto va a provocar la necesidad de reconocer la posibilidad de clasificar los triángulos atendiendo a distintos criterios e, inmediatamente, introducir una tabla de doble entrada que contenga las dos clasificaciones: según el tipo de ángulo y según la igualdad de los lados. Con respecto a esta tabla es muy interesante el debate que surge en el aula sobre la existencia o no de algunos pares de características: «equilátero + rectángulo», «obtusángulo + isósceles».

La importancia de una clasificación radica no sólo en obtener una partición de un conjunto sino en conocer las características y propiedades de los elementos de dicho conjunto…

- La segunda duda surge con la pieza que no es ni un triángulo ni un cuadrado (romboide). La primera impresión les hace pensar en un rombo, pero enseguida se dan cuenta de que no lo es y analizan las propiedades que caracterizan un rombo y cuáles de ellas mantiene el tan que tienen delante. Estas reflexiones nos van a permitir entrar de lleno en la clasificación de los cuadriláteros, construir distintos polígonos de este tipo y buscar criterios para clasificarlos: atendiendo a igualdad de diagonales, posición de diagonales, igualdad de lados, paralelismo de lados, ejes de simetría, ángulos rectos, ángulos iguales, etc.

No podemos perder de vista que la actividad era clasificar las piezas del tangram, pero para ello hay que reconocer las características de cada uno de los tans y eso fue lo que se hizo hasta el momento: qué tipo de polígono son atendiendo a sus lados, si tienen simetrías, qué tipo de ángulos tienen, etc. De esta manera, tenemos bien caracterizados todos los tans, lo que nos será de gran ayuda para las próximas actividades. Los criterios usados en esta clasificación por los alumnos están muy condicionados por los que acabamos de ver en las de triángulos y cuadriláteros: número de lados, número de lados iguales, tipos de ángulos, existencia de ángulos rectos, existencia de lados paralelos, existencia de diagonales, etc. Es curioso constatar que algunos criterios como la existencia de ejes de simetría (o su número), la cantidad de diagonales distintas, nunca son tenidos en cuenta a pesar de haber sido trabajado en las clasificaciones de triángulos y cuadriláteros. Esto nos muestra que los alumnos se manejan más cómodamente dentro de las clasificaciones clásicas que ellos estudiaron, a pesar de que a veces no sean las más idóneas para lo que se pretende tratar.

Actividad 2

Mide y anota todas las longitudes (de lados) distintas que encuentres.

La sola manipulación del material no es suficiente para recoger toda la información que éste puede transmitir y tampoco permite plasmarla claramente sobre el papel, por todo ello es muy importante el uso de una notación correcta para cada pieza que nos ayude a ganar agilidad y eficacia. En este sentido, se propone a los alumnos usar símbolos o letras para referirnos a dichas piezas, siempre después de que ellos comprendan la necesidad de hacerlo, tras lo que se plantea la tarea de hallar notaciones adecuadas. Se presentan varias, pero en todas las ocasiones la aceptada por la mayoría tras un breve análisis de las ventajas e inconvenientes de cada una es, coincidiendo con la propuesta por Álvarez (1996), la siguiente:

P: triángulos pequeños,

G: triángulos grandes,

M: triángulo mediano,

R: romboide,

C: cuadrado.

Otra notación cómoda y bastante representativa sería: T_P, T_G, T_M, R y C.

Objetivos

- Ver la necesidad y conveniencia de la utilización de una notación correcta, lo cual va a permitir simplificar y mejorar la comprensión tanto de la escritura como de los gráficos y esquemas usados en el desarrollo de las actividades.
- Comprender el concepto de unidad de medida de longitud.
- Ver la utilidad del trabajo con una variable para no hacer depender el resultado obtenido del tangram de cada grupo. Necesidad del uso del lenguaje algebraico para representar resultados generales frente a datos o medidas particulares.
- Utilizar el teorema de Pitágoras para conseguir todas las longitudes de los lados de los tans.

Principales dudas

- Operaciones con el número irracional $\sqrt{2}$. Buscan la manera de eliminar la raíz intentando aproximar su valor, lo que implicará que en ese intento aparezcan nociones como aproximación por defecto, aproximación por exceso, número de decimales para operar, etc.
- Problemas de diversos tipos relacionados con el significado de variable y el número de variables que necesitan para obtener todas las longitudes.

...es muy importante el uso de una notación correcta para cada pieza que nos ayude a ganar agilidad y eficacia.

El proceder habitual de los alumnos, cuando se les plantea este problema, es medir con una regla la longitud de los lados de cada tan y sólo después de la intervención del profesor en el sentido de proponerles generalizar los resultados obtenidos a cualquier otro tangram independientemente de las dimensiones del cuadrado inicial, usarán una variable de la cual van a depender todas las demás longitudes. El número $\sqrt{2}$ aparece al calcular, a partir de la aplicación del teorema de Pitágoras, la hipotenusa de P. Aquí conviene aclarar que tienen absoluta libertad para elegir como variable cualquier lado de cualquiera de los tans, lo que nos permitirá contrastar y comparar los resultados obtenidos por cada uno de los grupos y volver sobre la idea de semejanza. Es cierto que se podría haber tomado como unidad de longitud el cateto de P (o cualquier otro lado) con lo cual se eliminaría la dependencia de una variable, pero ese no sería el objetivo que se pretende y tampoco conseguiríamos eliminar el elemento perturbador y la dificultad, que tiene para ellos, operar con él. Además, en ninguna de las ocasiones en que fue planteada la actividad los alumnos sugirieron esta posibilidad, por lo que no se consideró necesaria una indicación en este sentido, si bien en un análisis posterior sí fue comentada esta posibilidad por parte de la profesora.

Es preciso señalar que en la mayoría de las ocasiones los alumnos observan que es suficiente aplicar el teorema de Pitágoras una sola vez, pues las demás longitudes se obtienen directamente manipulando correctamente los tans, es decir, que una correcta y detenida manipulación y análisis de las piezas puede ahorrar cálculos innecesarios.

Actividad 3

Encuentra la superficie del tangrama cuadrado tomando como unidad cada una de las piezas. Calcula la superficie de las demás piezas tomando como unidad:

a) Un triángulo grande.

b) El romboide.

c) Un triángulo pequeño.

d) El triángulo mediano.

Al manipular las siete piezas es fácil observar que el triángulo pequeño está contenido en las demás piezas un número entero de veces, lo cual nos lleva a considerar esta actividad como una de las más sencillas, siempre que se tenga claro el concepto de unidad de medida, en este caso de superficie.

Sin embargo, el concepto de unidad de medida no está tan claro como debiera y esto se constata cuando en esta actividad lo primero que hacen es calcular el área de cada pieza y después multiplicarla o dividirla por el número correspondiente para obtener el de las demás con respecto a la pieza elegida. Es sólo en este momento cuando utilizan la idea de unidad de medida de superficie, lo que revela la identificación que hacen los alumnos entre un concepto general (unidad de medida) y un caso particular del mismo (las unidades del sistema métrico decimal).

Objetivos

- Concepto de unidad de medida. Medida de superficie.
- Habituar a los alumnos a trabajar con cualquier unidad de medida.
- Pasar de una unidad a otra de forma sencilla.
- Obtener un nuevo criterio para la clasificación de las piezas atendiendo al área.

Principales dudas

- Número de alturas de un triángulo. Esta duda surge cuando pretenden calcular el área del triángulo pequeño para obtener la del tangrama en forma de cuadrado La convicción generalizada de que sólo tienen una altura deriva de la idea previa de *base* de un triángulo como el lado de mayor longitud que, además, se coloca horizontalmente, lo que implica que la altura es el segmento que baja perpendicularmente desde el vértice opuesto a la base. El triángulo es rectángulo-isósceles y lo colocan con la hipotenusa como base (ver figura) para poder calcular la altura siguiendo la enseñanza que han recibido anteriormente.

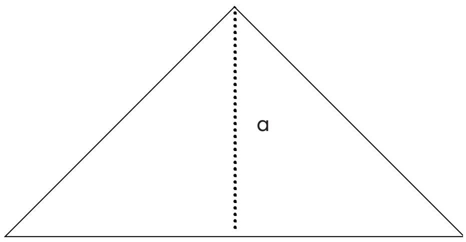


Figura 3

- Rechazo a la aparición de partes de la unidad, como sería el caso en el que si tomamos como unidad de medida la superficie de M, tendrían como superficie de P la mitad de M. Esto obedece a la poca confianza de los alumnos cuando se trata de trabajar con fracciones o decimales y a su identificación de las soluciones correctas de un problema numérico con números enteros.

...lo que revela la identificación que hacen los alumnos entre un concepto general (unidad de medida) y un caso particular del mismo (las unidades del sistema métrico decimal).

Actividad 4

Tomando los dos triángulos pequeños, únelos para obtener todos los polígonos que puedas. Describe cada uno de los polígonos obtenidos y sus características principales.

Dentro de esta misma actividad podemos distinguir dos planteamientos: el primero en el que sólo se admiten uniones de lados de la misma longitud y el segundo en el que se permite cualquier tipo de unión. En el primer caso sólo podrán construir cuadriláteros y triángulos, concretamente los tan C, R y el M (figura 4). El segundo caso permitirá la aparición de polígonos cóncavos (figura 5), obtendrán polígonos de más lados y deslizando un lado sobre otro obtendrán una infinidad de polígonos distintos (figura 6) los cuales, sin embargo, tendrán una serie de características comunes. Este último panteamiento los llevará hasta una situación de conflicto entre el resultado y sus concepciones, la cual obligará a reenunciar el concepto de polígono de modo lo más claro y detallado posible (figura 6).

Objetivos

- Revisar y ampliar el concepto de polígono.
- Clasificación de polígonos en cóncavos y convexos.
- Comprobar que figuras de igual área pueden tener distinto perímetro.
- Posibilidad de usar el perímetro como criterio para clasificar los tans.

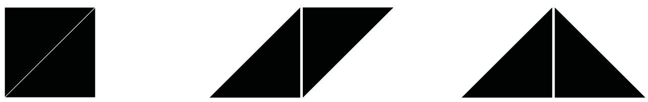


Figura 4

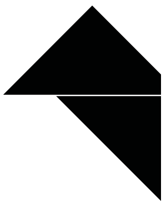


Figura 5

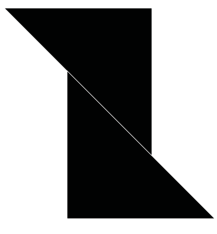


Figura 6

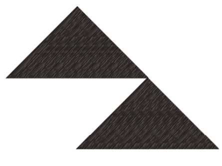


Figura 7

Principales dudas

- Construcción de figuras que no saben si son o no polígonos, pues no encajan dentro de la idea que ellos tienen de este concepto, aunque en la mayoría de los casos no son capaces de exponer razones (más o menos convincentes) en que basar sus hipótesis. Entre las figuras que provocan esta cuestión se encuentran principalmente los polígonos cóncavos, puesto que hasta ahora no habían aparecido en actividades anteriores, y construcciones como la de la figura 7.
- La idea, muy arraigada en los alumnos a pesar de su supuesta formación matemática anterior (algunos alumnos tienen superada la asignatura de Matemáticas de COU), de «a igual área corresponde igual perímetro» supone uno de los principales obstáculos en el desarrollo de esta actividad, llegando en algún caso los alumnos a reafirmarse en esta hipótesis errónea pese a obtener resultados que la desmienten (piensan que el fallo es del resultado y no de la hipótesis).

Actividad 5

Ordena las piezas del tangram.

Ordenar también es una actividad propia de numerosos campos de la matemática y, aunque su dominio habitual de actuación sea el de los Números, vamos a ver la importancia que llega a adquirir en geometría. El enunciado de la actividad está planteado de forma poco clara y es demasiado general, pero este efecto está buscado con el fin de provocar un análisis y debate que nos va a permitir retomar la idea de clasificación como relación de equivalencia pero sin entrar de manera muy profunda ni formalista en la Teoría de Conjuntos.

Objetivos

- Propiedades que determinan una relación de orden.
- Diferenciar ordenar de clasificar.

Ordenar también es una actividad propia de numerosos campos de la matemática y, aunque su dominio habitual de actuación sea el de los Números, vamos a ver la importancia que llega a adquirir en geometría.

Principales dudas

- Al aplicar la relación «menor que» (o «mayor que»), que es la que aparece en un primer momento, se encuentran con el problema de definir ese «menor que» con respecto a algo concreto, es decir, si uno plantea «¿qué pieza del tangram es menor que las demás», automáticamente los alumnos piensan en los triángulos pequeños, al igual que consideran los triángulos grandes como las piezas mayores del tangram (nótese que en ningún caso ha sido necesario definir el significado de «mayor que», las respuestas se basan únicamente en la propia intuición). Sin embargo, el problema surge a la hora de «ordenar» las otras tres piezas puesto que ello requiere una definición concreta de la relación que estamos aplicando. Aquí surgen como posibles alternativas el área y el perímetro: en el primer caso ninguna de las piezas sería mayor que las demás, pero sí en el segundo.

  Llegado a este punto el profesor analiza con los alumnos el proceso seguido y los invita a recordar el concepto de relación de orden. Tras un breve repaso del mismo, es asumido rápidamente el conflicto existente entre la «ordenación» realizada y el cumplimiento de la propiedad antisimétrica (existen piezas distintas que coinciden en área y perímetro). Tras la sorpresa de los alumnos se les hace ver que lo que ellos hicieron en realidad no es otra cosa que clasificar de nuevo las piezas atendiendo a nuevos criterios, con lo que se retoman actividades anteriores y se muestra a los alumnos la importancia de tener claros los conceptos matemáticos que hay que aplicar (en este caso el de relación de orden) con el fin de evitar posteriores sorpresas.
- Conflicto sobre el significado de ordenar. En el diccionario se presenta como sinónimo de colocar, distribuir… y este significado se acerca más al concepto previo de los alumnos que el matemático de establecer una relación de orden.

Actividad 6

Toma tres triángulos de entre los cinco existentes. Ensaya cómo deben situarse para obtener el polígono del máximo (mínimo) número de lados. Extiende el resultado a n triángulos.

En esta actividad se aplican y relacionan conceptos adquiridos en las anteriores (polígono cóncavo, convexo, concepto de vértice, etc.), por lo que no es planteada en ningún caso como una actividad propicia para que afloren nuevos contenidos. En este sentido, podemos considerarla una actividad integradora o globalizadora.

Objetivos

- Indagar sobre las distintas posibilidades de elección de los triángulos y la influencia de esta elección sobre el resultado final.

- Habituar al alumno a plantear estrategias de análisis en las que se traten de un modo exhaustivo todas las situaciones posibles.
- Usar el método de inducción.

El razonamiento inductivo se puede considerar como un procedimiento educativo muy útil para la adquisición y descubrimiento de conceptos y propiedades de ámbito geométrico o matemático en general. El uso de la inducción para contar (en este caso, el número de lados) consiste en analizar la evolución de una determinada cantidad al aumentar la complejidad del problema.

Principales dudas

- ¿El número máximo (mínimo) de lados del polígono que se va a formar depende de los triángulos escogidos?

Antes de comenzar con la enumeración de posibles resultados nos planteamos las distintas posibilidades de elección de los triángulos:

- utilizar dos pequeños y el mediano (PPM);
- tomar dos pequeños y el grande (PPG);
- dos grandes y uno pequeño (GGP);
- dos grandes y el mediano (GGM);
- y, por último, uno grande, uno pequeño y el mediano (PMG).

En principio no resulta muy claro para los alumnos que la solución depende o no de la combinación elegida y comienzan a enfrentarse con el problema por el método de ensayo-error. Si pretendemos obtener el polígono con el menor número de lados y tenemos en cuenta que cada grupo hace su elección de triángulos, nos encontramos con polígonos como los de la figura 8.

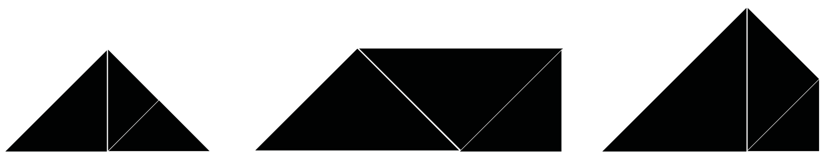


Figura 8

Tras sucesivas manipulaciones y análisis, y con alguna indicación por parte del profesor en casos concretos, observan que para obtener el número mínimo necesitan que lados de distintos triángulos unidos formen un lado del polígono nuevo (supondría «convertir dos lados en uno») y que, además, el polígono sea convexo para no ganar lados, es decir, unir los polígonos entre sí por lados de igual longitud.

En el caso de construir el polígono con el mayor número de lados la situación cambia (no depende de la elección) y llegar a la solución para n triángulos resulta muy sencillo (figura 9).

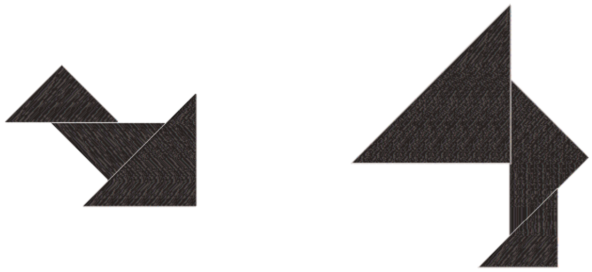


Figura 9

Evaluación

La evaluación es una parte importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje y, como tal, debe ser planteada en la descripción y programación de toda actividad (y es importante que nuestros alumnos de Magisterio así lo entiendan) pues casi siempre actividades diferentes requieren métodos o criterios de evaluación diferentes. Esto es importante a la hora de programar cualquier actividad con nuestros alumnos, pues creemos que uno de los errores de la enseñanza tradicioinal consiste en la mecanización de los medios de evaluación (exámenes escritos en su mayoría) desvirtuando o ignorando totalmente otras posibilidades muchas veces más educativas para los alumnos (lectura de libros, realización y exposición de trabajos, exámenes o pruebas en grupo, trabajo de aula…). La metodología seguida condicionará el sistema de evaluación, por lo que, al haber planteado la clase con una estructura de laboratorio el profesor deberá recoger información sobre cada alumno y sobre la dinámica del grupo durante todas las sesiones de trabajo.

Se propuso a los alumnos tras finalizar las actividades la realización de un tangram original, en el cual se dieran las dos principales características del tangram chino manejado en clase, es decir, deberían construir un tangram de forma que tuviera una pieza «generadora» en cuanto al área (el papel que hacía el tan P en el tangram chino) y que todos los diseños de figuras estuvieran formados con todas las piezas que resultaran de la disección de ese tangram. Este trabajo debería estar acompañado de una serie de actividades de tipos diversos que ellos mismos propondrían (en algunos casos originales y en otras adaptaciones de las ya realizadas) en las que se trabajasen contenidos matemáticos.

Se les enseñaron otros modelos de tangrams que cumplían esos requisitos (tangram cuadrado, tangram rectangular, tangram triangular, etc.), en los que se podían observar diferentes figuras generadoras dependiendo de la figura de la que se partía, y otros que no los cumplían pero que servían igualmente para trabajar contenidos matemáticos, incluso en algún caso aumentaba la complejidad de la disección, de las formas y de los contenidos a estudiar (tangram en forma de huevo).

Los resultados fueron muy interesantes, desde la figura inicial elegida para realizar la disección hasta la forma de plantear las actividades. La mayoría optó por elegir un polígono regular como figura inicial para obtener los tans, mientras que otros tomaron como referencia un barco, un muñeco, etc. En cuanto a la forma de plantear las actividades, tenemos por un lado los que siguen un esquema idéntico al planteado en clase y, por otro lado, los que eligen otro tipo de opciones como, por ejemplo, un cuento en el que el protagonista es la figura a partir de la cual se obtienen los diversos tans y en cuyo desarrollo se van obteniendo otros protagonistas de la historia a partir de las mismas piezas. Mientras se lee y sigue la historia se van planteando al niño diferentes actividades de contenido matemático.

La presentación también fue interesante puesto que contrastaban los que planteaban su trabajo de un modo académico: presentación de las piezas, actividades, soluciones; y quienes optaban por un estuche que contenía las piezas en diferentes materiales y se separaba por un lado el material para el alumno y por otro las indicaciones para el profesor.

…la idea consiste en no presentar las matemáticas como un edificio terminado lleno de contenidos en principio innecesarios (desde el punto de vista del alumno), sino en ir construyendo dicho edificio siguiendo más o menos lo que es el desarrollo de la historia de cualquier ciencia.

Conclusiones

Es cierto que los contenidos aparecen un poco desordenados si los comparamos con el esquema lógico-deductivo marcado por la enseñanza de la geometría tradicional; sin embargo esto hace, desde mi punto de vista, que se generen conceptos, habilidades y procedimientos en el momento que realmente los necesita el alumno y no antes. De esta forma, perdemos la secuencia lineal que se sigue habitualmente, pero, por el contrario, se dotan de significado los conceptos estudiados, viendo el nacimiento de algunos de ellos como respuesta a problemas o situaciones concretos, es decir, la idea consiste en no presentar las matemáticas como un edificio terminado lleno de contenidos en principio innecesarios (desde el punto de vista del alumno), sino en ir construyendo dicho edificio siguiendo más o menos lo que es el desarrollo de la historia de cualquier ciencia.

La mayoría de las actividades son sencillas y se necesita poco tiempo para su desarrollo; sin embargo, cuando menos lo esperamos se complican debido a los siguientes motivos:

1. Las concepciones previas de los alumnos como consecuencia de una geometría pobre y restringida al cálculo de áreas y volúmenes como único objetivo.
2. Poca destreza en la manipulación del material, en particular el tangram, lo que hace que no vean la componente geométrica que se deriva de las relaciones que existen entre las piezas, así como la escasa «visión geométrica» que dificulta la consecución de algunas figuras con rapidez.
3. Tendencia a dar un valor numérico en cualquier tipo de situación de medida aunque no se requiera explícitamente. Esta tendencia provoca que no vean la utilidad de usar una variable o bien que no lleguen a comprender el significado de *unidad de medida*.

Una conclusión de tipo general se basa en la importancia que adquiere la metodología empleada otorgándole el mismo peso que a los contenidos. Desde esta perspectiva, el clima en el que aprenden los futuros profesores va a configurar su actitud a la hora de encontrarse con las situaciones de enseñanza como señalan Gimeno y Fernández, citados por Azcárate (1998):

> El método con el que aprenden los futuros profesores genera un clima en el que aprenden muchas destrezas profesionales soterradamente, de forma implícita, que son las que configuran decididamente las actitudes del futuro profesor a la hora de enfrentarse con las situaciones de enseñanza.

Para finalizar, se puede considerar esta experiencia como una actividad abierta que coincide en el planteamiento base con los llamados «proyectos de aula» (De la Torre, 1996), es decir, las situaciones con las que se encontraron los alumnos requirieron más conocimiento geométrico del que poseen y los llevaron a aplicar lo que ya conocen, de manera que en este sentido se motiva al alumno (futuro profesor de primaria) a plantearse preguntas y es él quien crea su propio conocimiento.

> El conocimiento profesional no puede ser transferido, es construido individualmente por cada profesor desde sus propias experiencias, en interacción con el entorno y en un camino que relacione el nuevo conocimiento con el pensamiento previamente elaborado, en un intento de dar sentido al nuevo conocimiento. (*Professional Development and Teacher Autonomy*, Castle, K. y Aichele, D. B. 1994)

Bibliografía

ALSINA, C., C. BURGUÉS y J.M. FORTUNY (1987): *Invitación a la didáctica de la geometría*, Síntesis, Madrid.

ALSINA, C., J.M. FORTUNY y R. PÉREZ (1987): *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO*, Síntesis, Madrid.

ÁLVAREZ, A. (1996): *Actividades matemáticas con materiales didácticos*, Narcea/MEC, Madrid.

AZCÁRATE, P. (1998): «El diseño curricular en la formación didáctico matemática de los maestros», en *Actas del II simposio sobre el currículum en la formación inicial de profesores de primaria y secundaria en el área de didáctica de las matemáticas*, ICE de la Universidad de León, León.

CASCALLANA, M.T. (1988): *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*, Santillana, Madrid.

CASTLE, K. y D.B. AICHELE (1994): «Professional Development and Teacher Autonomy», en AICHELE y COXFORD: *Professional Development for teachers of Mathematics,* NCTM, Reston.

DE LA TORRE FERNÁNDEZ, E (1996): *La geometría y la formación del profesorado en primaria y secundaria*, Manuales UEX, N.° 22, 23-37.

ELFFERS, J. (1982): *El tangram. Juego de formas chino*, Labor, Barcelona.

FETCHER, D. y J. IBBOTSON (1965): *Geometry whit a Tangram*, W & R Holmes Ltd., Glasgow.

GARCÍA, J. y C. BERTRÁN (1987): *Geometría y experiencias*, Alhambra, Madrid.

GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.

JOOST, E. (1982): *El tangram. Juego de formas chino*, Labor. Barcelona.

María Teresa Fernández
Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Santiago de Compostela.
ENCIGA

SUMA 42
febrero 2003, pp. 23-36

Medidas de apoyo pedagógico, didáctico y organizativo ante el fenómeno del fracaso matemático escolar en alumnos minoritarios

Núria Planas i Raig

Este artículo aporta reflexiones y sugerencias para dar un paso adelante en la construcción de una cultura de la diversidad en un ámbito donde apenas se plantea su conveniencia: el aula de matemáticas. Desde el convencimiento de que todo alumno debería recibir una educación matemática significativa y ninguno debería ser excluido por motivo de diferencias culturales, sociales o lingüísticas, desarrollamos una visión de la educación matemática centrada en dos grandes, y nada fáciles, objetivos: conseguir aprendizaje matemático para todos y promover formas de enseñanza que contribuyan a la democratización de un aprendizaje de calidad.

ARTÍCULOS

De la diversidad de culturas a la cultura de la diversidad

Un famoso relato de Franz Kafka, *Comunidad*, refleja la tradicional hostilidad hacia lo diferente, lo extraño, lo que se aparta de la normalidad. En este relato, el escritor narra la historia de un grupo de amigos que dejan de sentirse cómodos ante la inesperada llegada de un extranjero. Estos amigos confían en que el extranjero se irá pronto porque aquél no es *su* lugar, restableciéndose, así, el supuesto orden inicial. Nuestro mundo social, y nuestro mundo educativo en particular, se caracterizan cada vez más por la diversidad de culturas, culturas que unas veces conviven y que otras veces simplemente aprenden a soportarse, como en el cuento de Kakfa. La creciente diversidad de culturas es una realidad que no necesita de estadísticas por lo evidente que resulta. Tampoco son necesarias estadísticas para señalar las múltiples dificultades y contradicciones que han surgido socialmente como consecuencia de la llegada masiva de gentes de otros países. Lo diferente, lo extraño, tiene la capacidad de provocar un fuerte sentimiento de amenaza en muchos de nosotros. La escuela y la educación matemática no viven ajenas a esta situación.

Sin duda, la inmigración está generando un profundo debate en nuestro país. El crecimiento de los flujos migratorios, especialmente el de los llamados países del tercer mundo hacia los llamados países del primer mundo, ha provocado que el tema de la educación multicultural cobre una destacada relevancia en los últimos años. En muchas aulas hay un importante aumento de alumnos que viven una integración difícil. Se trata de alumnos pertenecientes a minorías étnicas, inmigrantes de primera o segunda generación, que llegan a una sociedad y a un sistema educativo desconocidos para ellos y, en muchos sentidos, incompatibles con sus expectativas de normalidad. Muchos de estos alumnos acumulan historiales académicos de fracaso escolar y apenas unos pocos consiguen promocionar en nuestro sistema educativo. A esta situación de diversidad étnica, hay que añadir el creciente proceso de marginación socioeconómica que experimentan la mayoría de lugares geográficos donde se instalan los inmigrantes.

La diversidad de culturas ya es un hecho. Pero, ¿qué ocurre con la cultura de la diversidad? A menudo se olvida que todo aprendizaje es por contraste, y que el contraste sólo es posible si hay diferencias y si, además, éstas se explicitan. Este artículo aporta reflexiones y sugerencias para dar un paso adelante en la construcción de una cultura de la diversidad en un ámbito donde apenas se plantea su conveniencia: el aula de matemáticas. Tratamos de contribuir a mejorar la comprensión de las dificultades en el aprendizaje matemático de los alumnos minoritarios, aunque nuestra propuesta incluye pautas de actuación que deberán proporcionar respuestas positivas a las necesidades de todos los alumnos. Estas pautas habrán de promover una cultura de la diversidad en el aula de matemáticas, en espera de que algún día exista una cultura de la diversidad fuera de ella.

¿Desigualdad de oportunidades en el aprendizaje matemático?

Todo alumno debería recibir una educación matemática significativa y ninguno debería ser excluido por motivo de diferencias culturales, sociales o lingüísticas. Además, las escuelas deberían contribuir de forma activa a identificar aquellos factores educativos que disminuyen las oportunidades de aprendizaje matemático de algunos alumnos y superar dichas barreras sin perjudicar seriamente la integridad individual y colectiva de ningún alumno. Conviene explicitar esta declaración de principios desde un inicio, por muy evidente que parezca, porque estas intenciones no coinciden precisamente con nuestra experiencia de la realidad. De acuerdo con estos principios de calidad e igualdad, no podemos dejar de buscar métodos y estrategias que favorezcan la consecución de una educación matemática significativa para todos. Es decir, una educación matemática que redefina los contenidos matemáticos escolares, primero en términos de educar ciudadanos para vivir en la sociedad actual y, sólo más tarde, en términos de capacitar unos determinados perfiles profesionales.

Cuando una educación matemática en la etapa de escolarización obligatoria sólo es significativa para aquellos que habrán de seguir estudios superiores, no tiene mucho sentido hablar de intentos por equiparar las oportunidades de aprendizaje matemático de todos los alumnos. Por supuesto, el hecho de capacitar para unos determinados perfiles profesionales no se opone necesariamente al objetivo más global de educar ciudadanos, pero sí es cierto que muchas veces lo restringe hasta excluir de esa educación matemática a aquellos alumnos cuya identidad social no se ajusta a dichos perfiles. Nuestra experiencia muestra, por ejemplo, que es poco habitual que, ante las preguntas «¿Por qué estamos haciendo esto? ¿Para qué sirve?», los alumnos minoritarios acepten respuestas académicas del tipo «Porque sale en el temario» o «Lo váis a necesitar más adelante». Estos alumnos acostumbran a argumentar que para ejercer las profesiones que a ellos supuestamente les esperan no va a ser necesario el temario de matemáticas que están dando. En cambio, los alumnos locales de clase media, las pocas ocasiones en que se permiten plantear estas mismas preguntas, acostumbran a mostrarse satisfechos con estas mismas respuestas o, al menos, a no mostrarse decepcionados. Aunque estos últimos alumnos tampoco parecen esperar respuestas plenamente satisfactorias, entienden que para ejercer el tipo de profesiones que les depara el futuro van a necesitar unas matemáticas técnicas y poco relacionadas con aspectos de la vida cotidiana, aspectos que, en cualquier caso, deberán tratarse en otras asignaturas. Así, la capacitación para unos determinados perfiles profesionales de corte más académico parece servir de mayor o menor motivación para los alumnos en función de su ubicación sociocultural.

…las escuelas deberían contribuir de forma activa a identificar aquellos factores educativos que disminuyen las oportunidades de aprendizaje matemático de algunos alumnos y superar dichas barreras sin perjudicar seriamente la integridad individual y colectiva de ningún alumno.

El ejemplo anterior pone de manifiesto la fragilidad de las oportunidades de aprendizaje en el discurso pedagógico práctico, aunque el discurso teórico abogue por fortalecer las oportunidades de los más débiles. El discurso pedagógico teórico que prevalece en la actualidad combina dos grandes preocupaciones: la atención a la diversidad y la igualdad de oportunidades. Se dice que para darse uno de los principios mencionados es imprescindible prestar atención al otro y viceversa. Pero, más allá de aspectos relacionados con el curríclo matemático y su justificación, ¿qué tiene que ver la diversidad con la igualdad?, ¿o con la desigualdad? Poner juntos a alumnos muy diversos no es una situación de por sí igualitaria. La democratización en el acceso a la educación no implica democratización en la atención recibida ni en los resultados. Del mismo modo, el concepto de igualdad de oportunidades suele diluirse en cuanto se intentan aplicar criterios de homogeneización en la selección de un grupo clase. En resumen, y tal como señala Clements (2000), las relaciones entre diversidad e igualdad son muy complejas y se han venido caracterizando más por la desigualdad en las oportunidades de acceso, atención y resultados de los distintos alumnos, que por los intentos de equiparar en lo posible las condiciones de su aprendizaje.

…las relaciones entre diversidad e igualdad son muy complejas y se han venido caracterizando más por la desigualdad en las oportunidades de acceso, atención y resultados de los distintos alumnos, que por los intentos de equiparar en lo posible las condiciones de su aprendizaje.

Primeros indicios documentados sobre la desigualdad

Aunque son más frecuentes que años atrás, en el campo de la educación matemática a nivel internacional y, en concreto, en nuestro país, todavía no abundan trabajos sobre las dificultades de aprendizaje matemático en alumnos inmigrantes. Y, cuando los hay, tienden a reducir la problemática planteada a meras cuestiones relativas a handicaps cognitivos, lingüísticos, emocionales, culturales… Este hecho tiene que ver con la tardía introducción del debate social en el ámbito de la educación matemática y, como consecuencia, la tardía recontextualización teórica de términos procedentes de las llamadas teorías de lo social (antropología, psicología cultural, sociología crítica...) (para más detalle, ver Planas, en prensa). La mayoría de investigaciones desarrolladas hasta el momento ponen de relieve aspectos de los grupos minoritarios que acentúan sus diferencias respecto a los grupos mayoritarios, en lugar de destacar aspectos que son comunes y que podrían encontrarse radicalizados en alumnos con un precario reconocimiento cultural y social (Keitel y Kilpatrick, 2000).

Revisando la literatura en educación matemática, a pesar de la escasez, se observa que durante los últimos veinte años ha ido aumentando paulatinamente el interés por la perspectiva sociocultural y, aquí dentro, por la perspectiva sociocultural crítica. De hecho, la investigación sobre el aprendizaje matemático de las minorías tiene sus orígenes en la investigación sobre el aprendizaje matemático de las mujeres. En 1975 encontramos los primeros artículos publicados que tratan directamente el tema de las minorías y las matemáticas. En concreto, se estudia el caso de las mujeres pertenecientes a grupos minoritarios y sus dificultades en el aprendizaje matemático. Estudios anteriores se habían referido a las diferencias en el terreno afectivo entre alumnos de distintos grupos sociales y culturales. Pero, aunque el rendimiento en matemáticas era una variable a considerar en todos estos estudios, comprender los motivos por los cuales el rendimiento era más bajo en los alumnos minoritarios no era un propósito explícito. El tema se aproximaba desde un punto de vista descriptivo y esencialmente estadístico.

Hasta 1975 se habían desarrollado muy pocos trabajos de relevancia sobre matemáticas y minorías, todos ellos en la comunidad de habla inglesa, y sólo unos pocos habían llegado a ser publicados. Lo curioso es que en varios países se empezaba a promover el desarrollo de un currículo de matemáticas especial para jóvenes de grupos minoritarios, a pesar, insistimos, de la ausencia de investigaciones en este campo. Unos años más tarde, los intereses políticos en Estados Unidos, en una etapa de apogeo en la defensa de los derechos civiles de las minorías, hicieron que importantes fundaciones privadas costearan, por primera vez, proyectos de investigación sobre minorías y matemáticas. Como consecuencia, en marzo de 1984, una prestigiosa publicación en educación matemática, el *Journal for Research in Mathematics Education*, editó un monográfico titulado «Minorities and Mathematics». El monográfico incluía un recopilatorio de investigaciones empíricas de naturaleza estadística, donde se denunciaba el elevado porcentaje de fracaso matemático escolar en los grupos de alumnos inmigrantes de primera y segunda generación en países como Estados Unidos, Alemania y Reino Unido. Se hablaba de alumnos minoritarios al referirse a alumnos con condiciones de riesgo vinculadas a su procedencia cultural y social. La editora del monográfico, Westina Matthews, en referencia a los prejuicios de tipo social que, a su entender, limitaban la comprensión del fenómeno de fracaso escolar de las minorías, escribía en la introducción:

> […] Creo que nuestra incapacidad por comprender las diferencias en la participación y el aprendizaje [matemático] entre los distintos grupos étnicos puede derivarse de varios supuestos cuestionables que fundamentan las actuales líneas de investigación. […]

El monográfico «Minorities and Mathematics» fue un punto de partida básico para investigaciones posteriores que desde distintos ámbitos políticos fueron, en parte, obstaculizadas. A pesar de las demandas de varios entornos académicos y foros internacionales de investigación, instituciones gubernamentales y administraciones educativas de diversos países rechazaron sistemáticamente suministrar evidencias estadísticas concretas acerca del menor rendimiento matemático escolar de alumnos inmigrantes y/o en situación de riesgo social, argumentando que estos datos podrían ser usados para estigmatizar aún más a estos grupos de alumnos. En la actualidad, y a grandes rasgos, se pueden distinguir dos tipos de investigaciones. El primer tipo hereda el enfoque estadístico inicial y se limita a exponer los índices de fracaso escolar de ciertos grupos, al mismo tiempo que reclama a las administraciones pertinentes claridad en sus posicionamientos y actuaciones, y celeridad en la cesión de los datos. El segundo tipo complementa y, a la vez, reacciona al anterior. Lo complementa porque no sólo se piden responsabilidades a las administraciones sino que también se hace mención de los restantes miembros de la comunidad educativa. Y supone una reacción porque exige ir más allá de la descripción de cifras para llegar a interpretar su significado.

Los estudiosos que buscan interpretar el tema del fracaso matemático escolar señalan como causas indicadores de muy diversa índole. Para la mayoría de ellos, el origen del fracaso no reside únicamente en las características personales del alumno y del grupo sociocultural al que éste pertenece. Las creencias y expectativas respecto a unos determinados grupos de alumnos y el convencimiento generalizado de que éstos acumulan importantes déficits deben ser consideradas causas de primer orden ligadas al fracaso. Es necesario tener en cuenta las condiciones en las que se produce el aprendizaje matemático, tanto desde la perspectiva del alumno como de su relación con el entorno interpersonal más inmediato, si queremos construir una interpretación del fracaso que no se centre en la penalización del alumno. El conjunto de estas condiciones interrelacionadas es lo que, de algún modo, puede acabar originando trayectorias individuales y colectivas de fracaso escolar.

Sobre el fracaso escolar y el modelo del déficit

¿Por qué fracasan algunos alumnos en clase de matemáticas? Existen varios modelos explicativos que intentan responder a esta cuestión. Antes que nada, es necesario aclarar a qué tipo de fracaso nos referimos. Hay dos tipos principales de fracaso matemático escolar. En primer lugar, hay un fracaso que surge de las reiteradas evaluaciones negativas que ciertos alumnos reciben en el área. Luego, encontramos otro fracaso, también muy importante y del que se habla menos, que se refiere a aquellos alumnos que acaban la escolaridad obligatoria sin haber adquirido las habilidades matemáticas mínimas para desenvolverse en la sociedad donde les ha tocado vivir. En nuestro sistema educativo, esta última noción de fracaso es difícil de medir y observar porque apenas se hace referencia a ella. No hablaremos del fenómeno de analfabetización funcional en matemáticas, aunque creemos que es un tema sobre el que aún no se ha reflexionado lo suficiente y que tiene mucho que ver con el fenómeno del fracaso. Lo dejamos para otro artículo. Aquí, cuando hablemos de fracaso, estaremos refiriéndonos esencialmente a los porcentajes de fracaso reconocidos oficialmente por medio de datos estadísticos. Es decir, aquel fracaso que se contrapone al denominado éxito académico y que se origina como consecuencia de sistemas de evaluación aplicados a un determinado currículo establecido. Éxito académico que, por otra parte, no tiene que ver necesariamente con la adquisición de un cierto grado óptimo de alfabetización funcional en matemáticas. Puede haber a la vez éxito académico y escasa competencia matemática.

…hay un fracaso que surge de las reiteradas evaluaciones negativas que ciertos alumnos reciben en el área.

…otro fracaso, también muy importante y del que se habla menos, que se refiere a aquellos alumnos que acaban la escolaridad obligatoria sin haber adquirido las habilidades matemáticas mínimas para desenvolverse en la sociedad donde les ha tocado vivir.

Por supuesto, el riesgo de fracaso siempre existe en toda la población escolar. Sin embargo, algunos grupos de alumnos acumulan mayores porcentajes de fracaso. Entre otros, encontramos a los jóvenes inmigrantes extracomunitarios. En este caso, es evidente la importancia que tiene el dominio y uso del lenguaje vehicular del aprendizaje respecto a los fenómenos de éxito y fracaso escolar. Pero sería demasiado simple interpretar el fracaso en las matemáticas escolares de muchos alumnos inmigrantes tan solo en términos de dificultades lingüísticas. Del mismo modo que sería erróneo confundir la dificultad en la comprensión de una lengua específica con la incapacidad en el uso correcto de cualquier lengua. Hay muchos otros factores involucrados en sus dificultades de aprendizaje. En este punto, vamos a tratar de cuestionar creencias predominantes acerca de las razones asociadas a las dificultades en el aprendizaje matemático de estos grupos de alumnos.

El hecho de que en los últimos años la administración educativa haya situado por igual los alumnos discapacitados (físicos o psíquicos) y los procedentes de otros países dentro de la amplia clasificación de alumnos con necesidades educativas especiales (n.e.e.), ha contribuido a empeorar las expectativas sociales respecto al rendimiento escolar de los jóvenes de minorías étnicas. Sin embargo, los alumnos procedentes de minorías étnicas no son, ni deben tratarse como alumnos discapacitados, aunque necesiten apoyo, como todos, durante el período de su escolaridad. De todos modos, si tomamos la amplia definición oficial de alumnos con n.e.e. (es decir, cuando se presentan dificultades físicas, sensoriales, intelectuales, emocionales, sociales, o alguna combinación de éstas, que afectan al aprendizaje), estos alumnos pueden considerarse bajo la etiqueta de necesidades educativas especiales, al igual que todos los alumnos lo son en cierta medida y en ciertos momentos.

Todos los alumnos tienen necesidades educativas específicas o especiales más o menos transitorias. Naturalmente, cuando la administración educativa habla de alumnos del tipo n.e.e. se refiere a problemáticas de una cierta gravedad y persistencia. Pero precisamente por eso no tiene sentido asociar el término directamente a los grupos minoritarios. Los alumnos inmigrantes no presentan en general handicaps de tipo funcional, sensorial o motor, ni tampoco dificultades específicas de tipo visual, auditivo, del habla o físicas. Las dificultades de adaptación a la nueva cultura escolar y los frecuentes historiales de bajo rendimiento académico no son argumentos suficientes para concluir sobre unas supuestas incapacidades que les caracterizarían en el mundo escolar. Ni son discapacitados ni están genéticamente imposibilitados para tener un buen desarrollo personal y un acceso normalizado al currículo matemático escolar. Por ello, se hace necesario revisar los programas compensatorios dominantes en nuestro sistema educativo. El modelo del déficit subyacente en estos programas es un claro impedimento para una aproximación efectiva a una cultura de la diversidad en el aula de matemáticas.

Los casos de éxito académico de alumnos minoritarios en contextos de aprendizaje positivos para ellos muestran que no se pueden establecer diferencias cognitivas entre el rendimiento de los alumnos en función del grupo social y cultural al que éstos pertenecen.

Los programas compensatorios, implantados en las escuelas de casi todas las sociedades modernas a inicios de los ochenta, consideran que los alumnos con identidad social de riesgo requieren de una atención exclusiva y especializada que garantice la adquisición de los objetivos escolares por medio de una pedagogía adaptada. Los programas que se vienen adoptando en el intento de dar respuesta a la gestión de la diversidad sociocultural en las escuelas de nuestro país se basan en esta idea. El problema radica en que la práctica compensatoria parte de una interpretación de la diferencia en tanto que déficit, y de la igualdad en tanto que uniformidad. La filosofía de fondo consiste en un concepto negativo de diversidad cultural y social. Prevalece socialmente el prejuicio según el cual los alumnos de grupos minoritarios son menos «racionales» y más «emocionales» que los otros. Se interpreta que su mundo es más afectivo y literario, mientras que el de otros alumnos sería más formal y analítico. También se les considera más supeditados a los intereses de su grupo social y menos dispuestos a intereses sociales de tipo más general. Se tiende a creer que tienen una fuerte dependencia de las condiciones de su contexto y que la vivencia principalmente emocional de este contexto les impide desarrollar formas causales y genéricas de pensamiento que prescindan de su lugar o afiliación social.

El modelo del déficit cognitivo es todavía el más vigente, con todo el reduccionismo en la práctica educativa que ello conlleva. De los grupos minoritarios en las sociedades occidentales modernas se ha llegado a decir que presentan más dependencia del juicio de los demás y que este hecho dificulta el desarrollo de un buen proceso de aprendizaje matemático. También se ha trabajado sobre la hipótesis de un retraso en la maduración del funcionamiento cerebral de los alumnos minoritarios. Pero no cabe duda que este modelo resulta insuficiente y contradictorio. Además, el hecho de que estos programas se implementen únicamente en aulas con alumnos inmigrantes y/o en situación de riesgo social indica su escaso carácter inclusivo. Deberíamos preguntarnos cómo es posible que haya alumnos minoritarios que, pese a sus supuestas limitaciones de tipo cognitivo, consiguen un buen rendimiento académico en matemáticas. Los casos de éxito académico de alumnos minoritarios en contextos de aprendizaje positivos para ellos muestran que no se pueden establecer diferencias cognitivas entre el rendimiento de los alumnos en función del grupo social y cultural al que éstos pertenecen (Abreu, 2001). Actuar sobre el problema del fracaso significa actuar sobre el contexto en el que se produce. Todo modelo explicativo del fracaso debe situar la realidad del alumno en los contextos socioculturales donde esta realidad se reconstruye continuamente.

No es posible comprender las causas del fracaso matemático escolar explicando simplemente las características personales y sociales de los alumnos. Para una interpretación correcta del fracaso que no se base en la penalización del alumno, hay que tener en cuenta como mínimo tres aspectos: a) las medidas de apoyo pedagógico con las que cuentan estos alumnos, b) las medidas de apoyo didáctico y, por último, c) las medidas de apoyo organizativo del centro. En primer lugar, ¿qué se acostumbra a hacer en las aulas, desde el discurso pedagógico y desde el docente, para responder a la diversidad de alumnado?, ¿se ha producido un auténtico cambio de rol en el profesor ante las nuevas circunstancias?, ¿se han diversificado estrategias y metodologías para atender a la diversidad? Y aún más, ¿cuáles son las reacciones organizativas de los centros ante la escolarización de alumnos distantes de la «normalidad» esperada? Es necesario cuestionar decisiones organizativas, curriculares y pedagógicas que no parecen estar resolviendo la problemática de fracaso matemático escolar en los alumnos minoritarios, ya sean inmigrantes o en situación de riesgo social, y que, a pesar de ello, continúan manteniéndose.

Medidas de apoyo pedagógico: dificultades en el cambio de rol del profesor

La enseñanza de las matemáticas muestra una aparente contradicción entre los objetivos expresados por las matemáticas escolares y los resultados más comunes, en especial aquellos referidos a la tradicional contribución de esta área a los índices de fracaso mayoritariamente concentrados en los grupos minoritarios (van Oers, 1998). En general, los docentes son conscientes de esta aparente contradicción y acostumbran a sentir una cierta frustración. David, profesor de secundaria de un grupo de alumnos hispanos en un aula de Tucson, Arizona, explica así su frustración ante una situación que le parece fuera de su control:

> Llevo ya más de dos semanas en esta escuela y estoy pensando en renunciar. Mis más de veinte años de experiencia docente no me han preparado para esta situación. Los programas de estudio que se supone que debo seguir no tienen nada que ver con la realidad de mi aula. El promedio de la mayoría de mis estudiantes de séptimo y octavo grado (de 12 a 14 años de edad) es de tercer grado. [...] No puedo creer que con toda mi experiencia, y mis estudios teóricos sobre la enseñanza de las matemáticas, esos «diablos» me estén prácticamente aplastando en todos los sentidos. (Civil, Planas y Fonseca, 2000: 37.)

…¿qué se acostumbra a hacer en las aulas, desde el discurso pedagógico y desde el docente, para responder a la diversidad de alumnado?, ¿se ha producido un auténtico cambio de rol en el profesor ante las nuevas circunstancias?, ¿se han diversificado estrategias y metodologías para atender a la diversidad?

En esa época, este profesor acababa de concluir sus estudios de maestría en educación matemática, y tenía muy presentes los marcos teóricos y metodológicos para desarrollar actividades de aprendizaje en ambientes con alumnos en período de adquisición de una segunda lengua. Antes del inicio del curso escolar invirtió mucho tiempo preparando lecciones y actividades de aprendizaje acordes no sólo con el contenido matemático que el currículo señalaba, sino también con criterios pedagógicos de la enseñanza en contextos multiculturales. Pero esas lecciones tan bien diseñadas eran excesivamente genéricas y no tenían en cuenta a los alumnos de esa escuela en concreto; no tenían en cuenta sus experiencias particulares ni sus intereses. El currículo matemático que este profesor trataba de implementar vivía totalmente apartado de la realidad cultural y social de sus alumnos, no sólo por el nivel de los contenidos, sino principalmente porque no integraba las experiencias culturales que los alumnos ya poseían. El profesor, tras reflexionar sobre cómo resolver los problemas de participación en sus clases, entendió que le era necesario asumir un cambio de rol. Tenía que ceder parte de sus tareas y permitir que los alumnos le ayudaran a interpretar el currículo en el contexto de aquel grupo clase.

Las necesidades educativas de la sociedad actual requieren importantes cambios en las formas de actuación del profesor. La escasa predisposición a enfrentarse a estos cambios es un factor que debe relacionarse con los elevados porcentajes de fracaso escolar. El profesor actual aún está demasiado condicionado por lo que el profesor de hace unas décadas hacía en el aula a nivel de interacción, organización y toma de decisiones, obviándose una y otra vez las posibilidades del profesor como agente de cambio, así como aquellos factores que influyen en los procesos de cambio. Las respuestas dadas por los enseñantes a determinadas preguntas señalan algunas de las principales inercias del actual discurso pedagógico matemático: ¿Transmitir información o negociar significados? ¿Matemáticas escolares como un producto dado o como un proyecto común? ¿En qué sentido tiene que cambiar el tradicional papel del profesor de matemáticas si se plantean sesiones basadas en tareas no rutinarias y metodologías de atención a la diversidad? ¿Cuáles deben ser las medidas de apoyo pedagógico que deben favorecerse para que profesores como David no piensen en renunciar?

Los profesores se encuentran con situaciones que, si bien son diferentes en muchos aspectos, plantean una misma cuestión: ¿cómo desarrollar una enseñanza de las matemáticas que permita la participación de todos los alumnos? Cuando se habla de alumnos minoritarios, es especialmente importante pensar tanto en su rendimiento como en sus posibilidades de participación (Planas, 2001). Facilitar su aprendizaje matemático está relacionado con generar un clima donde puedan participar en igualdad de condiciones que el resto de alumnos. La práctica diaria, la intuición de que las mejoras en educación matemática provienen de estudiar cuestiones concretas y, finalmente, la certeza de que las decisiones tomadas en el aula no deben establecerse de forma definitiva y permanente sino versátil y con posibilidad de cambio, confirman la complejidad de la tarea de enseñar. Esta complejidad hace que no se pueda concebir la acción sin una reflexión rigurosa y útil. Pero, ¿cuántos profesores están dispuestos a intentar diferentes enfoques metodológicos? Cambiar significa, entre otras cosas, pasar a moverse por terrenos menos conocidos donde la experiencia no puede usarse como un argumento de validez de la propia actuación. Las situaciones de aula pueden llegar a ser muy problemáticas y, sin embargo, la idea del cambio continúa viéndose como lo verdaderamente problemático.

Al abrir las puertas a la participación de todos los alumnos en el aula, se crean situaciones de inseguridad para el docente (Civil, Planas y Fonseca, 2000). ¿Qué hacer con intervenciones que parecen no estar relacionadas con nuestra agenda matemática prevista?, ¿cómo integrar experiencias de alumnos que sean muy diferentes de las experiencias a las que el docente está acostumbrado?, o ¿cómo romper con los estereotipos que se usan para describir a ciertos grupos, normalmente aquellos grupos que son diferentes del nuestro, tópicos basados en aspectos superficiales y generalidades? En un aula con alumnos locales, guineanos, dominicanos, paquistaníes y magrebíes, ¿cuáles son los estereotipos que pesan sobre estos grupos?, ¿cómo influyen nuestro comportamiento en el aula?, ¿hasta qué punto controlamos la influencia de estos estereotipos en nuestras actuaciones? Éstas son preguntas difíciles que no pueden evitarse si queremos desarrollar un clima de mayor participación en el aula y, por tanto, de mayor aprendizaje. El mero hecho de plantearse estas preguntas ya requiere un importante cambio de rol del profesor. El profesor debe negarse a normalizar la no participación sistemática de determinados alumnos en el aula, buscando espacios de responsabilidad sin caer en fatalismos ni euforias excesivas.

…¿cómo integrar experiencias de alumnos que sea muy diferentes de las experiencias a las que el docente está acostumbrado?

Todavía es poco frecuente la consideración del profesor como investigador de su realidad de aula y como formulador en potencia de cuestiones relevantes para la mejora de la enseñanza. A menudo olvidamos que los profesores son los principales agentes encargados de implementar los cambios educativos, lejos de ser meros repetidores pasivos ajenos a reflexiones e innovaciones. Como consecuencia, se produce un cierto desánimo en el colectivo de enseñantes a los que socialmente se les exige éxitos en los aprendizajes, pero paradójicamente no se les reconoce un espacio y un tiempo para identificar, diagnosticar y aproximar ideas sobre problemas prácticos en situaciones particulares. A todo esto hay que añadir inercias que muestran, por ejemplo, la falta de un espíritu de colaboración entre docentes: ¿no debería ser posible aprender tanto de los otros profesores como aprendemos de nuestros propios alumnos? Se aprende de la realidad de un aula cuando se contrasta con la realidad de otras aulas. Para solucionar la falta de conocimientos del profesor referentes a la nueva situación, es imprescindible adoptar el rol del investigador en una dinámica de intercambio continuo.

Es habitual oir quejas sobre, por ejemplo, la falta de materiales curriculares innovadores ante situaciones de enseñanza y aprendizaje multiculturales. Pero éste es un problema secundario, aunque importante. Si aparecen en el mercado nuevos materiales curriculares sin que el profesor haya asumido su cambio de rol, no cabe esperar que el uso de esos materiales aporte mejoras significativas. Las múltiples reticencias que todavía encontramos ante el que para algunos es un excesivo uso de la calculadora ordinaria o de la calculadora gráfica, o bien la preocupación por introducir contenidos de estadística o de geometría cuando se tiene la certeza de que no hay un dominio suficiente del cálculo más elemental, son aspectos que indican las dificultades por modificar y ampliar partes de un currículo que a veces parece intocable. El currículo matemático escolar sólo será integrador y tendrá un carácter cultural positivo si nosotros lo interpretamos en este sentido, tras escuchar las interpretaciones de los diversos alumnos. El cambio de rol del profesor es, pues, la principal medida de orden pedagógico que habrá de facilitar la consecución de posteriores medidas de orden didáctico y organizativo.

Medidas de apoyo didáctico: dificultades de aprendizaje en el alumno

Joel, alumno dominicano de incorporación tardía en un instituto de Barcelona, respondió así en el transcurso de una entrevista individual, acerca de su participación en las clases de matemáticas:

ENTREVISTADORA. ¿Qué tal las clases de matemáticas?

JOEL. A veces sé lo que hay que hacer pero casi nunca lo hago.

ENTREVISTADORA. ¿Y eso por qué?

JOEL. No vale la pena esforzarse...

ENTREVISTADORA. ¿Por qué dices eso?

JOEL. Ni voy a ser nunca un matemático ni tampoco quiero serlo.

ENTREVISTADORA. ¿Pero no vas a necesitar las matemáticas para otras cosas?

JOEL. Yo me voy a poner a trabajar cuando pueda.

ENTREVISTADORA. Entonces, ¿las matemáticas de la escuela para qué te sirven?

JOEL. Yo si quisiera las entendería, pero ¿para qué? Si sólo sirven para aprobar, a mí no me sirven.

Lo que se pretende que el alumno aprenda puede encontrarse muy lejos de su conjunto de experiencias vitales. Joel deja claro que las matemáticas no tienen nada que ver ni con su vida actual ni con sus planes de futuro. Sin embargo, de acuerdo con las opiniones manifestadas en la entrevista, no parece que este alumno actúe con despecho o irresponsabilidad. De hecho, Joel muestra una gran madurez en sus argumentos. La motivación por aprobar la asignatura le resulta insuficiente para implicarse en prácticas de aula que considera del todo irrelevantes. En un determinado momento, Joel reconoce que mejoraría su comportamiento si las clases le resultaran interesantes. Este alumno atribuye su baja motivación al hecho de ser incapaz de sentirse atraído por contenidos tan lejanos de su vida cotidiana. Sus expectativas en relación con las lecciones de matemáticas son muy escasas. No cree que se traten conocimientos útiles, y tampoco cree que se usen metodologías motivadoras para los que «necesitan que se les anime a estudiar». Además de no comprender la importancia de ciertas tareas matemáticas planteadas en el aula, Joel no comparte con el profesor ni con algunos de sus compañeros supuestos básicos para comprender los enunciados de los problemas matemáticos. Para él, «no hay sólo una única interpretación correcta del problema», «ni el enunciado contiene necesariamente toda la información requerida para resolver la tarea».

Si aceptamos que las aulas no son homogéneas, deberemos aceptar que las tareas y metodologías planteadas tampoco deben ser homogéneas.

Algunos profesores de matemáticas han tomado la iniciativa de responder a los nuevos retos planteados por las aulas multiétnicas haciendo adaptaciones curriculares de muy diversa índole. Otros profesores han reaccionado con un cierto escepticismo, creyendo que es poco conveniente mantener alumnos inmigrantes con el resto de alumnos y que las adaptaciones curriculares no pueden salvar la enorme distancia entre unos y otros, tanto por la capacidad cognitiva como por la predisposición afectiva. Sin duda, es imposible separar el dominio cognitivo del afectivo en cualquier tipo de actividad. Hay un componente cognitivo en cada objetivo de naturaleza afectiva, y también hay un componente afectivo en cualquier objetivo de naturaleza cognitiva. Sin embargo, las adaptaciones curriculares no parecen tener en cuenta este hecho. En cualquier caso, la atención a los alumnos de minorías étnicas no debe reducirse a adaptaciones superficiales del currículo ni a la contratación de más especialistas en educación especial. Así pues, ¿cuáles deben ser los principales criterios de apoyo didáctico en el aula que han de contribuir a que alumnos como Joel quieran participar y aprender?

Si aceptamos que las aulas no son homogéneas, deberemos aceptar que las tareas y metodologías planteadas tampoco deben ser homogéneas. La heterogeneidad, la diversidad al fin y al cabo, está en la realidad que nos rodea y sólo prescindiendo de hacer referencias a la realidad podremos obviar la diversidad. El hecho de reducir las sesiones de clase de matemáticas, o de cualquier otra asignatura, a conocimientos descontextualizados contribuye a uniformizar la atención a los diferentes alumnos. No tienen mucho sentido las continuas propuestas de tareas únicamente situadas en el contexto académico entre alumnos de muy diversas características. Sin embargo, ésta parece ser la pauta de actuación que predomina entre muchos de los profesionales de la educación matemática. No acostumbra a haber diversificación de tareas, de métodos ni de estrategias ante la diversidad de alumnado. Sin duda, la tendencia a uniformizar tiene que ver con muchas dificultades en el aprendizaje matemático de los alumnos más alejados de la «normalidad». Educar no debería consistir en convertir en «normal» al más diferente, en uniformizar. Educar debería contribuir a normalizar la presencia de ciertas diferencias en el aula.

Los actuales discursos docentes y pedagógicos dominantes en las matemáticas escolares aún son herederos del sistema de creencias basado en el modelo del déficit cognitivo. La práctica de habilidades numéricas de primer orden en detrimento de otras propuestas centradas en procesos de resolución de problemas o en discusiones abiertas que puedan implicar una mayor participación del alumno minoritario son una consecuencia directa de la problematización de la diferencia. Aunque los programas compensatorios están principalmente dirigidos a las prácticas de la escuela primaria, sus orientaciones incluyen los alumnos minoritarios de la escuela secundaria que, debido a un supuesto déficit, acostumbran a verse situados en un nivel de desarrollo cognitivo más propio de los últimos cursos de primaria. La medida excepcional de extender, sin ser modificados, programas de primaria a alumnos escolarizados en la enseñanza secundaria señala la visión simplificada que se tiene del aprendizaje matemático en los grupos de riesgo.

Los alumnos minoritarios reciben una educación matemática que desoye intencionadamente el desarrollo del pensamiento crítico. En Estados Unidos, por ejemplo, se han desarrollado estudios donde se muestra que, cuantos más alumnos minoritarios hay en una escuela, menor es el nivel matemático exigido por sus profesores y menores son las expectativas de que se produzca aprendizaje por parte de los miembros de la comunidad educativa. En la práctica, y como consecuencia de estas expectativas, acaba produciéndose una enseñanza paralela al currículo ordinario esencialmente basada en mecanismos de repetición, de imitación y de ensayo-error. La definición del alumno a partir de déficits y no de potencialidades impide detectar y reconocer formas de conocimiento matemático diferentes a las legitimadas en el aula. En definitiva, las prácticas compensatorias tienden a reducir las matemáticas escolares a la enseñanza y el aprendizaje de aspectos rutinarios, sin tener en cuenta otras capacidades que los alumnos puedan haber desarrollado fuera de la escuela o en sus países de origen.

…las prácticas compensatorias tienden a reducir las matemáticas escolares a la enseñanza y el aprendizaje de aspectos rutinarios, sin tener en cuenta otras capacidades que los alumnos puedan haber desarrollad fuera de la escuela o en sus países de origen.

De acuerdo con los programas compensatorios, tampoco se recomienda el ambiente de resolución de problemas porque se cree que los enunciados verbales pueden dificultar la adquisición de contenidos matemáticos en alumnos que supuestamente sufren, además de importantes limitaciones cognitivas, déficits de alfabetización lingüística. Por un lado, se piensa que los alumnos de minorías étnicas no pueden hacer matemáticas hasta adquirir una cierta competencia en la lengua vehicular del aprendizaje. Por otro lado, se interpreta que los alumnos de contextos sociales deprimidos tienen un registro lingüístico escaso que les impide acceder a razonamientos de orden superior, incluso cuando comparten la lengua principal del aula. Unos y otros, por razón de la lengua, ven negado el acceso completo al currículo ordinario de matemáticas. Y por si fuera poco, el handicap asociado a su condición sociocultural hace que, una vez adquirida una cierta competencia lingüística, se les continúe ofreciendo una atención basada en un currículo adaptado, donde las matemáticas se reducen a repeticiones mecánicas de ejercicios rutinarios. La directividad del profesor y de las tareas que propone obstaculiza el desarrollo de las competencias del alumno, sea o no inmigrante.

El currículo escolar debería reforzar lo que ha sido aprendido previamente y, a su vez, debería introducir nuevos conocimientos construidos sobre el conocimiento ya adquirido. Habitualmente, el docente conoce algunos aspectos del bagaje escolar de cada uno de sus alumnos y puede indagar parte del currículo que a cada uno de ellos ha sido impartido. En este sentido, cuantos más alumnos inmigrantes haya en un aula, la situación habrá de resultar más compleja para el profesor. Cada alumno inmigrante ha normalizado un cierto sistema educativo en su país de origen y es muy probable que a los profesores de aquí les falte información necesaria al respecto. Además, las sucesivas revisiones vividas por el currículo de nuestro país han alejado, en muchos casos, nuestro currículo de aquél que está siendo implementado en países no europeos (en Paquistán, por ejemplo, se enseña el uso de tablas de logaritmos a jóvenes varones de 14 años). Deberíamos, pues, esperar que los conocimientos matemáticos de un alumno inmigrante fueran muy diferentes de los adquiridos por un alumno ubicado en el sistema local desde el inicio de su escolarización. No obstante, profesores y maestros acostumbran a suponer que los conocimientos matemáticos previos y las necesidades educativas de alumnos inmigrantes y locales son idénticas. Y, como consecuencia, no sospechan la necesidad de indagar en qué aspectos las diferentes trayectorias vitales pueden estar influenciando los procesos individuales de aprendizaje matemático.

Es cierto que algunos alumnos acaban sabiendo más matemáticas, al menos en lo que se refiere a las matemáticas académicas que habrán de ser evaluadas. Sin embargo, urge analizar las diferentes oportunidades de aprendizaje que han recibido unos y otros. Mientras unos han construido la nueva matemática aprendida añadiendo contenidos al conjunto de sus conocimientos anteriores ya consolidados, los otros han visto cómo se les pedía que entraran en contradicción con partes esenciales de su identidad para así poder incorporar el nuevo código legitimado. Se acostumbra a enseñar y evaluar únicamente, por ejemplo, coordenadas cartesianas a alumnos que tienen múltiples formas sofisticadas de orientación espacial desarrolladas como consecuencia de precoces prácticas profesionales. No se da ningún valor, o apenas un valor escaso, a sus estrategias para encontrar una determinada calle o para saber en qué dirección hay que rezar para cumplir el rito musulmán de orientarse hacia La Meca. Con esto, no queremos decir que no sea necesario seleccionar y fijar elementos culturales concretos para configurar el currículo matemático escolar. Pero la selección y priorización de unos elementos culturales no debe significar la negación de otros existentes (Gorgorió, Planas y Vilella, 2000). Las coordenadas cartesianas, por ejemplo, no son más importantes, desde un punto de vista matemático, que otros sistemas de representación y orientación, por mucho que queramos darles más importancia desde un punto de vista evaluativo.

Medidas de apoyo organizativo: dificultades en la escolarización

La mayoría de actuaciones para la reducción de dificultades en el aprendizaje deben ir más allá de meras respuestas a nivel individual, ya sean del profesor o del alumno, e incluir cambios más globales dentro del propio medio escolar. No podemos obviar que las dificultades en el aprendizaje tienen mucho que ver con las dificultades en la escolarización. El mismo alumno del apartado anterior, Joel, durante el transcurso de la misma entrevista, dijo lo siguiente respecto a su relación con la escuela:

> ENTREVISTADORA. ¿Te gustaría continuar en esta escuela el próximo curso?
>
> JOEL. Mis amigos me dicen que aquí todas las escuelas son iguales. No les gusta mucho tener gente diferente. Muchos profes se quieren ir.
>
> ENTREVISTADORA. ¿Te gustaría continuar?
>
> JOEL. (Baja la mirada.) Ummm… no sé…
>
> ENTREVISTADORA. ¿Tan terrible es?
>
> JOEL. Tengo que irme acostumbrando.

…profesores y maestros acostumbran a suponer que los conocimientos matemáticos previos y las necesidades educativas de alumnos inmigrantes y locales son idénticas.

Prácticamente todos los profesionales de la educación matemática que han desarrollado su trabajo en aulas multiétnicas han podido comprobar las enormes dificultades de escolarización y de aprendizaje de muchos alumnos inmigrantes, en comparación con otros grupos de alumnos de su edad. Como ya se ha dicho, buena parte de estos profesionales tienden a atribuir dichas dificultades a determinados déficits que supuestamente limitarían la capacidad de aprendizaje de los alumnos inmigrantes. Sin embargo, desde un punto de vista educativo, no tiene sentido pensar que las diferencias entre alumnos inmigrantes y alumnos locales facilitan u obstaculizan por sí mismas su escolarización. Es la gestión de estas diferencias por parte de los miembros de la comunidad educativa lo que puede problematizarlas, convirtiéndolas en un elemento perjudicial para los procesos de aprendizaje.

Para empezar, la educación de los alumnos inmigrantes se lleva a cabo en centros ordinarios, en un intento de facilitar su integración. Sin embargo, han ido apareciendo estructuras organizativas especiales para estos alumnos. ¿Cuáles son los cambios en las escuelas que deberían (y podrían) llevarse a cabo para facilitar la adaptación de todos los alumnos? ¿Cuáles deben ser los principales criterios de apoyo organizativo?

¿Dónde se encuentra la frontera entre actitudes de apoyo y actitudes de rechazo hacia estos alumnos? Por supuesto, cada escuela debe tener capacidad para elaborar sus propias estrategias de integración y para modificar ciertas conductas que pueden estar manifestándose en el clima social del centro. Pero hay algunas estrategias que, independientemente del centro, no nos parecen válidas puesto que favorecen dos redes paralelas de escolarización que, en la práctica, acaban separando a los alumnos locales de los inmigrantes.

No insinuamos que deban adaptarse escuelas especiales para alumnos inmigrantes, sino la necesidad de mejorar las escuelas ordinarias y los currículos oficiales para que estos alumnos también tengan cabida. Hay que escolarizar a los jóvenes inmigrantes en centros ordinarios, puesto que las dificultades de escolarización no se resuelven aislándolos en centros especiales. Por otra parte, la escolarización de los alumnos inmigrantes tiene lugar principalmente en centros públicos. Se produce, pues, un fenómeno de concentración de este alumnado en unos determinados centros, a menudo situados en barrios socialmente deprimidos. La coincidencia de la inmigración extracomunitaria con las situaciones de exclusión social provoca que muchos docentes de estas escuelas perciban la diversidad cultural como un problema y no como una fuente de riqueza en la enseñanza y el aprendizaje. En este sentido, un problema de los centros de atención educativa preferente reside en la alta densidad de alumnos en situación de riesgo.

Ante la realidad de los centros de atención educativa preferente, podemos comprobar que tampoco se resuelve la escolarización de alumnos minoritarios en los centros ordinarios. Deben producirse antes ciertos cambios en el modelo predominante de escuela. No es conveniente, por ejemplo, recurrir a estrategias organizativas que, desde un principio, sitúen a los alumnos minoritarios en grupos de bajo rendimiento matemático simplemente por el hecho de ser minoritarios. Con frecuencia se dice de ellos que no cooperan, que reaccionan con agresividad, cuando no son radicalmente introvertidos, que llegan con muy malos hábitos. Pocas veces se dice que provienen de otros modelos educativos y que les cuesta entender algunos aspectos del nuestro. ¿Acaso no se comportan de este modo muy a menudo alumnos locales? Lo cierto es que los códigos de comportamiento usados en la escuelas no siempre coinciden con los códigos aprendidos en la familia. Los comportamientos inesperados no sólo crean confusión en el docente, sino que también deben interpretarse como un signo de confusión, de conflicto, en las mentes de los alumnos.

La coincidencia de la inmigración extracomunitaria con las situaciones de exclusión social provoca que muchos docentes de estas escuelas perciban la diversidad cultural como un problema y no como una fuente de riqueza en la enseñanza y el aprendizaje.

Existen evidencias de que la organización de una escuela puede tener algún tipo de efecto sobre el rendimiento de algunos grupos de alumnos (Molina, 1997). La falta de un clima adecuado de apoyo en el aula y en la escuela puede contribuir a crear mayores dificultades en los alumnos inmigrantes en sus intentos por ajustarse a las demandas de una organización educativa en parte desconocida para ellos. Tanto las escuelas como las aulas están mayoritariamente pensadas y dispuestas para alumnos y alumnas «normales». Ahí reside la principal limitación en el intento por crear ese clima de apoyo. Cuesta darse cuenta de que la idea de normalidad supone un concepto poco útil en cuestiones de educación, en especial cuando pretende usarse para explicar el rendimiento matemático de los diferentes grupos de alumnos. Estar pendiente de una cierta idea de normalidad impide construir un ambiente escolar favorable a la interculturalidad, es decir, al intercambio de reglas de juego distintas a las propuestas por la cultura mayoritaria en el aula. Significa, en el peor de los casos, crear un ambiente donde las reglas de juego de las culturas minoritarias no son reconocidas ni aceptadas. Y no olvidemos que la evolución en el aprendizaje de un alumno está profundamente vinculada a la visión, las expectativas y el reconocimiento de los otros participantes.

En general, las escuelas se organizan reformulando el concepto de diversidad hasta interpretarlo como un criterio válido para discernir capacidades y habilidades de los alumnos. La diversidad es vista esencialmente como diversidad de niveles y es usada para separar los alumnos en unos u otros grupos clase en función de niveles previamente identificados por medio de tests siempre dudosos. En la práctica no existe, por tanto, un referente cultural o social asociado a la palabra diversidad, tan solo un referente cognitivo. Se cae, así, en la trampa de hablar desde lo cognitivo para referirse a lo sociocultural. Aparentemente, dos alumnos distribuidos en dos unidades distintas de programación son diversos porque no coinciden en una de sus preferencias. Sin embargo, son diversos porque se les ha sugerido o impuesto la elección de una determinada unidad en función de su rendimiento académico. Unas unidades de programación están pensadas para «los buenos en matemáticas», mientras que otras recogen «los malos en matemáticas». Los profesores recién llegados a un centro son los que habitualmente reciben el «castigo» de encargarse de los alumnos a los cuales les han sido diagnosticados niveles más bajos.

Cuando la diversidad ha enojado demasiado se han articulado duros regímenes disciplinarios. Hasta el momento, el uso de un tono imperativo y sancionador no parece haber dado ningún resultado efectivo, excepto el del aumento de las cifras de absentismo en el grupo de alumnos de riesgo. Este tono imperativo aparece en muchas normativas de centro. Resulta paradigmático el caso de un centro público donde no se aceptaba negociar el aplazamiento de un examen convocado para la fiesta musulmana del día del cordero a pesar de la notable presencia de alumnos que profesaban esta religión (Planas, Vilella y Gorgorió, 1999). En ese mismo centro, los profesores tomaban toda clase de decisiones argumentando que los alumnos minoritarios no son capaces por ellos mismos de tomarlas puesto que se encuentran la mayor parte del tiempo algo desorientados. El lenguaje usado por la comunidad educativa, las decisiones tomadas, las actitudes adoptadas, los valores y comportamientos explicitados en el ambiente escolar, forman una parte importante de la cultura real de un centro. Este conjunto de conocimientos, transmitidos muchas veces inconscientemente, constituyen parte del nivel oculto del currículo, y a pesar de sólo hallarse incluidos en el nivel intencional de las respectivas disciplinas académicas, acaban siendo conocimientos del currículo aprendido.

Hacia una interpretación inclusiva del fracaso matemático escolar

Como ya se ha dicho, aún existen demasiadas investigaciones sobre minorías y matemáticas que priorizan el hecho de documentar el bajo rendimiento de los alumnos minoritarios y que, sin embargo, no pretenden explicar las causas de este menor rendimiento. Los estudios descriptivos de tipo estadístico confirman lo que ya sabemos: que el porcentaje de fracaso en los grupos minoritarios es muy elevado. Faltan estudios en profundidad sobre las variables que pueden estar condicionando dicho fracaso. La variable que se refiere a la dimensión personal del alumno, a su identidad individual y colectiva, es importante pero no decide por sí sola el nivel de rendimiento matemático. Hay tres variables fundamentales que deben ser tenidas en cuenta de forma interrelacionada. Hasta este punto las hemos tratado por separado. Se trata de las medidas (o falta de medidas) de apoyo pedagógico, las de apoyo didáctico y las de apoyo organizativo del centro, que contribuyen a que la identidad del alumno sea una ventaja o una desventaja en su aprendizaje matemático.

Hasta el momento, el uso de un tono imperativo y sancionador no parece haber dado ningún resultado efectivo, excepto el del aumento de las cifras de absentismo en el grupo de alumnos de riesgo.

Teniendo en cuenta las reflexiones aportadas hasta ahora, podemos considerar dos grandes conjuntos de causas generadoras de fracaso. Un primer conjunto depende del sistema de organización de la propia escuela y, más en general, de las directrices gobernantes en el sistema político-educativo donde la escuela se halla inmersa. Ya nos hemos detenido algo en explicarlo y no queremos hacer más énfasis en estos aspectos. No está realmente en manos de los docentes incidir en posibles mejoras, al menos desde una perspectiva práctica no tiene mucho sentido empezar a pensar en cambiar el sistema. Nos interesa más hacer hincapié en aquel otro conjunto de causas relacionadas con el aula y nuestra actuación en ella. Este artículo no pierde de vista los otros factores condicionantes del fracaso mencionados, pero se dedica muy especialmente a aquellos en los cuales el docente puede tener importantes espacios de acción. Para ello, analizamos las actuaciones, por acción o por omisión, de los participantes del aula, alumnos y profesor, y los situamos en un contexto más amplio de expectativas formadas, imágenes sociales construidas y valores asumidos que se sugieren por medio del discurso pedagógico y docente.

Cuando el profesor tiene unas claras bajas expectativas formadas respecto a los alumnos minoritarios (medidas de rechazo pedagógico), cuando los conocimientos matemáticos legitimados en el aula sólo representan la cultura mayoritaria (medidas de rechazo didáctico), y cuando además las reuniones de centro sirven para idear regímenes disciplinarios que controlen con rigidez los desajustes respecto a una esperada normalidad (medidas de rechazo organizativo), entonces es muy difícil que el alumno minoritario desarrolle mecanismos positivos de participación en el aula de matemáticas. Este alumno no vive ajeno a las medidas de rechazo más o menos sutiles que experimenta en su entorno escolar. Las reacciones a estas medidas de rechazo pueden ser de muy diversa índole. Algunos alumnos reaccionan acomodándose a la situación y disimulando su incomodidad. Otros alumnos, sin embargo, reaccionan resistiéndose a la situación con actitudes de inhibición u obstaculizando la participación de los demás. Es decir, las medidas de rechazo no siempre implican resistencia al aprendizaje. Es la combinación de estas medidas con la propia identidad de cada alumno lo que determina reacciones de acomodación o de resistencia. El hecho de que algunos alumnos se resistan a participar en un ambiente poco favorable para ellos no significa que deban ser penalizados, ya que su resistencia puede interpretarse como una resolución positiva al conflicto que experimentan.

Desde esta perspectiva, el fracaso matemático escolar puede interpretarse como el producto de dos situaciones interconectadas de exclusión social y de autoexclusión psicológica, donde la primera crea las condiciones de base que facilitan la aparición de la segunda. Para comprender mejor los mecanismos individuales de autoexclusión que pueden activarse en algunos alumnos, hay que hablar de las formas usadas por el alumno para interiorizar y dar sentido a las valoraciones que los otros otorgan a sus acciones y a la explicitación de sus significados personales. El conjunto de valoraciones coexistentes en el aula son de naturaleza sociocultural, pero tienen un fuerte impacto en la dimensión psicológica de sus participantes. ¿Qué ocurre cuando los significados de un alumno se están desautorizando sistemáticamente por la visión dominante en el aula? ¿Qué tipo de dificultades comporta a ese alumno aceptar significados inicialmente no compartidos? ¿En qué medida le es posible asumir e integrar afectivamente modelos interpretativos diferentes de los propios? ¿Cómo se manifiestan los procesos de acomodación y resistencia ante una realidad que no se comprende o que es diferente de la esperada? Estas cuestiones plantean la necesidad de analizar la manera en que el alumno vive el contraste de significados y valoraciones en el aula, y cómo esta vivencia afecta su identidad individual.

Lamentablemente, las matemáticas escolares, desde su fuerte estatus social y académico, han sido muchas veces usadas para justificar el papel prevalente de unos grupos y el subordinado de otros.

Con frecuencia, la tensión psicológica derivada de la experiencia de conflicto de significados y valoraciones contradictorias se expresa bajo la adopción de comportamientos de inhibición estables que tienden a favorecer la aparición del fracaso escolar. El alumno puede resolver la tensión psicológica racionalizando la comprensión de la realidad del aula y de la escuela. Al darse cuenta que su interpretación de lo que ocurre en el aula le puede excluir, el alumno puede optar por activar mecanismos de readecuación al entorno y de reestructuración de partes de su identidad. Estos mecanismos son paralelos al encubrimiento de las dificultades para comunicarse en un entorno hostil. En otras palabras, el alumno aprende a esconder su diferencia, independientemente de que trate de comportarse o no como se espera de él en el contexto escolar. No cabe duda de que este aprendizaje influye en sus formas de participación en el aula. El alumno asume su lugar «natural» en el aula que le habrá de facilitar el control de emociones negativas interiorizadas. Con el fin de sobrevivir a ciertas medidas de rechazo, el alumno aprende a rechazar los que representan estas medidas. Naturalmente, el proceso que va desde la percepción de medidas de rechazo a la adopción de una actitud de no participación, es muy complejo.

¿Es posible reducir los índices de fracaso?

Lamentablemente, las matemáticas escolares, desde su fuerte estatus social y académico, han sido muchas veces usadas para justificar el papel prevalente de unos grupos y el subordinado de otros. Lejos de dejarnos sin posibilidades de actuación, esta realidad nos obliga a repensar la educación matemática como un instrumento para equilibrar tanto como sea posible la desigualdad de oportunidades. La educación matemática tiene dos grandes, y nada fáciles, objetivos: conseguir aprendizaje matemático para todos y cuestionar aquellas formas de enseñanza que no contribuyan a la democratización de un aprendizaje de calidad. Por ello, debe plantearse si tiene sentido hablar de un aprendizaje de calidad para todos o, lo que es lo mismo, si tiene sentido pretender reducir los índices de fracaso matemático escolar. El papel del docente en toda situación educativa es dual: por una parte, el de afianzador de conceptos, métodos y estrategias y, por otra, el de agente de cambio. La capacidad de cambio en situaciones que en parte no funcionan es esencial para reducir el riesgo de fracaso matemático escolar. Sin embargo, cuando nos enfrentamos a situaciones complejas sin disponer de respuestas que las hagan algo comprensibles, podemos caer en la tentación de buscar seguridad en la convicción de que no existen respuestas ni mejoras. Es preciso combatir la sensación de que no se puede hacer nada para mejorar el aprendizaje matemático de ciertos grupos de alumnos.

Referencias bibliográficas

ABREU, G. (2001): «Towards cultural psychology perspective on transitions between contexts of mathematical practices», en G. ABREU, A., J. BISHOP y N.C. PRESMEG (eds.): *Transitions between contexts of mathematical practices*. Kluwer Academic Publishers, Londres, 173-192.

CIVIL, M., N. PLANAS y J.D. FONSECA (2000): «La atención a la diversidad en el aula de matemáticas: hacia una participación pedagógica y matemática», *UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas*, n.° 23, 29-42.

CLEMENTS, K. (2000): «Equitat i justícia social denegades: el cas de les matemàtiques escolars», *Biaix*, n.° 17, 18-28.

KEITEL, C. y J. KILPATRICK (2000). «La racionalidad e irracionalidad de los estudios comparativos internacionales», *UNO-Revista de Didáctica de la Matemática*, n.° 22, 79-100.

GORGORIÓ, N., N. PLANAS y X. VILELLA (2000): «Cultura y educación matemática: sugerencias para un cambio», *Cuadernos de Pedagogía*, n.° 288, 72-75.

MOLINA, S. (1997): *Escuelas sin fracasos. Prevención del fracaso escolar desde la pedagogía interactiva*, Aljibe, Málaga.

PLANAS, N., X. VILELLA y N. GORGORIÓ (1999): «La tasca educativa en centres públics marcadament multiculturals: presentació d'un cas», en L. ESPOT y otros (eds.): *Actes de les V Jornades de Direcció Escolar: Institució Escolar i Societat del Coneixement*, Universitat Autònoma de Barcelona, 142-151.

PLANAS, N. (2001): «Quan tothom intenta participar a l'aula de matemàtiques i només alguns se'n surten», *Biaix*, n.° 19, 37-43.

PLANAS, N. (en prensa): *Recontextualización de la noción de competencia comunicativa en el aula de matemáticas multilingüe*, Cultura & Educación.

SECADA, W. G., E. FENNEMA y L. B. ADAJIAN (eds.) (1997): *Equidad y enseñanza de las matemáticas: nuevas tendencias*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

VAN OERS, B. (1998): «The fallacy of decontextualisation», *Mind, Culture, and Activity*, n.° 5(2), 135-142.

Núria Planas
Departament de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals.
Facultat de Ciències de l'Educació.
Universitat Autònoma de Barcelona.
Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

SUMA 42
febrero 2003, pp. 37-45

La modelización matemática: una herramienta válida en la enseñanza de las matemáticas universitarias

Joan Gómez i Urgellés

ARTÍCULOS

Este artículo presenta el proceso de modelización matemática como herramienta innovadora en la enseñanza de las matemáticas en las Escuelas Universitarias (EU). Se relata la eficacia de la metodología a partir de la experimentación en escuelas técnicas con alumnos de primer curso de ingenieria. El objetivo de la experiencia es estudiar la viabilidad y eficiencia de implantar técnicas de modelización en las EU, a través del diseño de unidades didácticas y trabajos por proyectos. Como principales resultados se destacan las aportaciones metodológicas referentes a aspectos cognitivos (producciones matemáticas), epistemológicos y heurísticos del aprendizaje de los alumnos.

ANALIZANDO la situación curricular de la enseñanza de las matemáticas en las Escuelas Universitarias (EU) en estas últimas décadas, se observa una falta de aplicaciones y un excesivo formalismo en los currículos de matemáticas. En este contexto, destaca la insatisfacción en la enseñanza tradicional mostrada por los estudiantes y una desmotivación hacia las áreas de matemáticas. Estos aspectos ya fueron apuntados por conocidos matemáticos y educadores. Destacamos a Julio Rey Pastor, Pedro Puig Adam y John Perry, que ya manifestaron su preocupación por mejorar la enseñanza de las matemáticas en las escuelas técnicas. En esta línea, Rey Pastor afirma:

> La ausencia de aplicaciones nos hace incapaces de inspirar amor a esta ciencia. (Citado en Lusa, 1982).

John Perry añade:

> Es preciso desarrollar la intuición para que el ingeniero aprenda las relaciones entre el mundo real y la abstracción de la ciencia. (Citado en Lusa, 1982).

y Pedro Puig Adam comenta en el prólogo de *Cálculo Integral* (1979):

> En la enseñanza de las matemáticas es necesario substituir el formalismo por el pensamiento intuitivo y las matemáticas han de estar en contacto con situaciones de la realidad.

A partir de las afirmaciones apuntadas y de la propia experiencia docente podemos afirmar que todavía hoy, a las puertas del siglo XXI, la intuición y las aplicaciones quedan en segundo plano. La aportación presentada está focalizada en la innovación docente, fundamentada en la modelización matemática. De una manera breve, la modelización matemática consiste en presentar un problema real y a continuación formularlo en términos matemáticos. El tema es totalmente innovador y está poco desarrollado en escuelas universitarias, lo cual provoca un fuerte atractivo de investigación pedagógica que puede considerarse como una experiencia pionera en este ámbito. Para desarrollar la investigación es preciso definir y clasificar unos estadios de trabajo:

1. Inicial. Reflexionar sobre el estado actual de la enseñanza y establecer las hipótesis de trabajo. La principal hipótesis es destacar que formamos a futuros ingenieros y no a futuros matemáticos.
2. Intermedio. La búsqueda de un espacio de trabajo para desarrollar la experimentación y la investigación sobre el proceso de aprendizaje de los alumnos.
3. Final. Establecer la validez y eficacia de la metodología experimentada y la viabilidad de la inclusión del modelaje en los currículums de matemáticas.

Es importante destacar dos aspectos: por un lado el proceso de innovación docente del profesor –el cual se caracteriza en el diseño de actividades extraídas de la realidad– y, posteriormente, el proceso de investigación didáctica del profesor actuando como investigador del proceso de aprendizaje de los alumnos y de la validez del método.

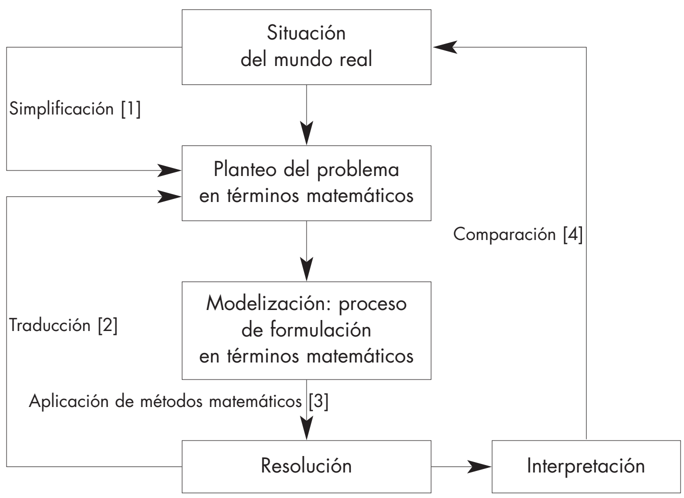
En esta investigación sobre innovación docente, el contexto de trabajo escogido ha sido la Escuela Universitaria Politécnica de Vilanova i la Geltrú (EUPVG), centro dependiente de la Universitat Politècnica de Catalunya. El dominio curricular está configurado por alumnos de primeros cursos de ingeniería industrial en las áreas de álgebra lineal y ecuaciones diferenciales. La experiencia expuesta en el presente artículo se basa en la experimentación de la metodología con alumnos de los cursos 1994-1995 hasta el curso 2001-2002, y el análisis de los correspondientes resultados. Los resultados expuestos validan la metodología de la modelización matemática como herramienta de enseñanza/aprendizaje.

El marco teórico en que se apoya la experiencia está constituido por tres ejes. El primer eje es el sociocultural-político. Este eje marca las connotaciones sociales de la matemática y su influencia en la vida cotidiana de los ciudadanos. Para la adquisición de una competencia crítica y una ciudadanía inteligente es preciso que los alumnos y ciudadanos en general adquieran conocimientos suficientes de matemáticas que les proporcionen criterios de comprensión y decisión (Skovsmose, 1997; Valero, 1994). Por citar un ejemplo, la prensa diaria muestra situaciones usuales fuertemente matematizadas: desde los indicadores económicos de la bolsa, hasta la interpretación de los esquemas y gráficos que establecen los pronósticos meteorológicos. Las dos situaciones mencionadas se gestionan por modelos matemáticos. En el ámbito de la ingeniería encontramos ejemplos en sistemas mecánicos (engranajes, resortes…) y, principalmente, en el estudio de circuitos –tanto eléctricos como electrónicos–. Los sondeos electorales y su interpretación es otro ejemplo sutil.

El marco teórico en que se apoya la experiencia está constituido por tres ejes.

El segundo de los ejes es el epistemológico-educativo, el cual marca la metodología docente seguida, basada en el proceso de modelización (esquema 1).

En [1] simplificación: la situación real puede manipularse de manera que cuando obtengamos el modelo real, tengamos que suponer diversas hipótesis. Por ejemplo, en situaciones de caída de cuerpos no se obtiene el mismo modelo real si consideramos la situación con rozamiento o sin él. En [2] traducción: no es lo mismo proporcionar el modelo que construirlo. A menudo la tarea de construcción es laboriosa. En este caso lo que se realiza es sustituir palabras por símbolos matemáticos (por ejemplo: ecuaciones, matrices, funciones, etc.). De esta forma, se consigue una formulación matemática del problema y de una manera natural se establece el problema en términos matemáticos. En [3] aplicación de métodos matemáticos: en este paso aparecen los algoritmos apropiados para la resolución del problema matemático que se deriva de la situación real. Es preciso resolver el modelo usando las herramientas adecuadas. En este punto, el profesor juega un papel importante, ya que los estudiantes a menudo no saben resolver el modelo, y es en este estadio donde en el aula o



Esquema 1. Organigrama del proceso de modelización

tutorías se muestran los métodos de resolución. Uno de los objetivos consiste en que el estudiante se dé cuenta de que para llegar a resolver un caso usual del ámbito de su especialidad necesita el aprendizaje de ciertos conceptos y técnicas matemáticas que proporcionen respuestas al problema establecido (aparece lo que podríamos llamar motivación). De esta manera, el alumno alcanza un grado fuertemente elevado de interés por el aprendizaje de las matemáticas, ya que visualiza su utilidad. Este hecho ya marca una diferencia en relación con la enseñanza tradicional. En [4] comparación: el objetivo es reescribir los resultados numéricos obtenidos en términos del problema propuesto, interpretarlos y, a su vez, saber escoger, si hay diversas soluciones, la adecuada a la situación.

Seguidamente explicitaremos las definiciones y terminología involucrada en la investigación. Entenderemos por *matematización* la definición aportada por Jan de Lange (1993): «Transformación mental en términos matemáticos de situaciones de la realidad»; en esta definición se considera el proceso de abstracción mental como paso previo a la modelización escrita. Es decir, el esquema mental realizado como fase anterior a la implementación escrita en lenguaje matemático. Asumimos como *modelización* la definición aportada dos años más tarde por Niss (1989): «El arte de aplicar las matemáticas a situaciones de la vida real»; en este sentido, consideramos la interpretación como el conjunto de habilidades que nos permiten plasmar el modelo de forma escrita. Finalmente aceptamos por modelo la terna (A, M, f), donde A representa un conjunto de objetos del mundo real, M un conjunto de expresiones matemáticas y f una correspondencia entre A y M.

En el tercer eje situamos el pragmático-actual. Este eje se nutre del estado actual del tema. En la actualidad existen diversas experiencias de modelización en niveles educativos inferiores a los universitarios, a pesar de ello es de destacar la experiencia de la Universidad de Aalborg de Dinamarca (Vithal, 1995), en la cual se realizan trabajos en proyectos. Entre las aportaciones más relevantes destacan las efectuadas en los Países Bajos por Jan de Lange (experiencia *Matematica A*, de Lange, 1993) y la contribución al trabajo en grupo y realización de proyectos efectuada en Lisboa por Paulo Abrantes (1994). Esta última, a pesar de ser de distinto nivel educativo, ha servido de patrón para el diseño de actividades en la EUPVG. Para visualizar el estado actual de la investigación, es de destacar que una simple ojeada a Internet, Alta Vista nos facilita 13004 entradas (con las palabras clave *modelling*, *educational*, *mathematical*, junio de 1998). Entre ellas destaca la web de Matskills (<http://www.hull.ac.uk/mathskills/newsletters/issue2/guest.htm>), la cual nos proporciona una base de datos de expertos en modelización a nivel mundial y las recientes aportaciones sobre el tema.

La estructura estándar de una unidad didáctica se configura en dos fases. La primera de ellas presenta la situación y construye el modelo de dicha situación; la segunda consiste en la interpretación de los resultados y establecer analogías.

En síntesis, hemos establecido los cimientos teóricos de la investigación presentando los ejes en los que se desarrolla. Seguidamente expondremos el desarrollo de la experiencia.

Desarrollo de la experiencia

La experiencia está focalizada en la innovación docente, y se ha desarrollado en lo que denominamos unidades didácticas y proyectos. El objetivo consiste en implementar las técnicas de modelización y estudiar su viabilidad y eficacia en las escuelas universitarias. Para alcanzar este objetivo es necesario establecer unos instrumentos de investigación válidos y fiables. Los instrumentos utilizados, tanto en el ámbito de la investigación didáctica como en el proceso de innovación docente, los podemos agrupar en cinco grupos:

I. Diseño de las unidades didácticas.
II. Implementación de proyectos.
III. Registro y selección de una muestra de estudiantes. Hoja de valoraciones de los interlocutores. Ficha personal del alumno. Diario de sesiones. Registros en vídeo. Audio.
IV. Autoinstrucción del profesor/investigador. Diario del profesor.
V. Cuestionario cognitivo metodológico. Encuesta oficial. El examen.

Veamos a continuación algunos aspectos destacados de la experiencia. En primer lugar presentaremos el diseño de las *unidades didácticas* y sus principales características. La estructura estándar de una unidad didáctica se configura en dos fases. La primera de ellas presenta la situación y construye el modelo de dicha situación; la segunda consiste en la interpretación de los resultados y establecer analogías. Las dos fases se enlazan a través de la resolución de las expresiones matemáticas involucradas de una forma guiada. Las unidades didácticas se cumplimentan en las aulas. En la experiencia se desarrollan dos unidades didácticas: *Modelización de un sistema de resortes* y *Los astronautas y las ecuaciones diferenciales*. A continuación mostramos la descripción del trabajo en una de las unidades didácticas mencionadas.

Unidad didáctica. Modelización de un sistema de resortes

El objetivo principal es, inicialmente, que a partir de situaciones reguladas por la ley de Hooke, con un único resorte y una sola masa, los estudiantes descubran dicha ley como una relación lineal entre la fuerza y el desplazamiento. En una segunda fase se añaden más resortes y nuevas masas; el objetivo a medio plazo es conseguir que se modelice la ley de Hooke en varias variables como un modelo lineal análogo al anterior. De esta forma descubren el concepto de matriz y las operaciones y propiedades típicas del cálculo matricial como modelo de la ley de Hooke. En este proceso se involucran los conceptos de matriz de elasticidad y rigidez (inversas entre sí). Se pretende con ello que los alumnos produzcan la matriz inversa y obviamente su utilidad en la mecánica. En una tercera fase se presenta una situación usual simplificada en el área de mecánica técnica para el estudio y posterior interpretación del comportamiento físico de la situación. En la figura 1 se detalla el esquema presentado.

El objetivo final se centra en que reconozcan e interpreten situaciones distintas a las estudiadas, que comparten el mismo modelo. Entre ellas destacan las aplicaciones a circuitos eléctricos. El esquema de la figura 2 se ha extraído de la mencionada unidad.

Con esta unidad se pretende que los estudiantes aprendan la necesidad y existencia del cálculo matricial como modelo matemático de situaciones usuales en las áreas propias de su especialidad, y que, a su vez, obtengan una motivación a través de las aplicaciones.

La unidad presentada se refuerza en soporte informático. Disponemos de un programa de simulación realizado en *Visual Basic 4.0*, en el cual los alumnos pueden definir a voluntad las unidades deseadas del movimiento de la masa involucradas. En la figura 3 observamos el diseño de una de las pantallas.

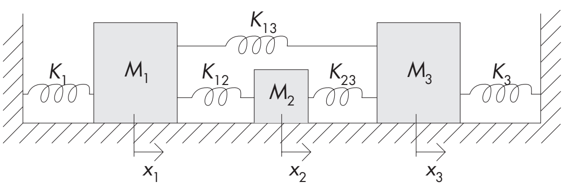


Figura 1. Esquema usual de mecánica técnica

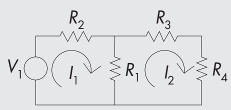
Las principales características diferenciales del trabajo en unidades didácticas, con respecto a los métodos tradicionales, consisten en presentar los contenidos de matemáticas en el contexto técnico. Como aportación destaca el hecho de que los alumnos descubren

Existe un paralelismo entre la ley de Ohm y la ley de Hooke. Las dos son expresiones del tipo

$$A = B \cdot C, \text{ en el caso que } \begin{cases} A = V;\ C = I \Rightarrow \text{Ley de Ohm} \\ A = F;\ C = x \Rightarrow \text{Ley de Hooke} \end{cases}$$

Podemos verlo en un ejemplo paralelo:

Suponer el siguiente circuito:



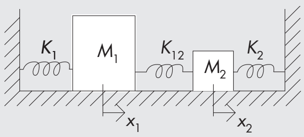
Si planteamos las ecuaciones:

$$V = (R_1 + R_2) \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2$$
$$0 = -R_2 \cdot I_1 + (R_2 + R_3 + R_4) \cdot I_2$$

Expresándolo matricialmente:

$$\begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Suponer el siguiente gráfico:



Planteamos las ecuaciones:

$$f_1 = -K_1 \cdot x_1 + K_{12} \cdot (x_2 - x_1)$$
$$f_2 = -K_{12} \cdot (x_2 - x_1) - K_2 \cdot x_2$$

Expresándolo de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(K_1 + K_{12}) & K_{12} \\ K_{12} & -(K_{12} + K_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Observar la similitud entre ambos problemas. También tenemos que darnos cuenta de que en estos problemas obtenemos siempre matrices simétricas.

Figura 2. Esquema de modelos de situaciones análogas

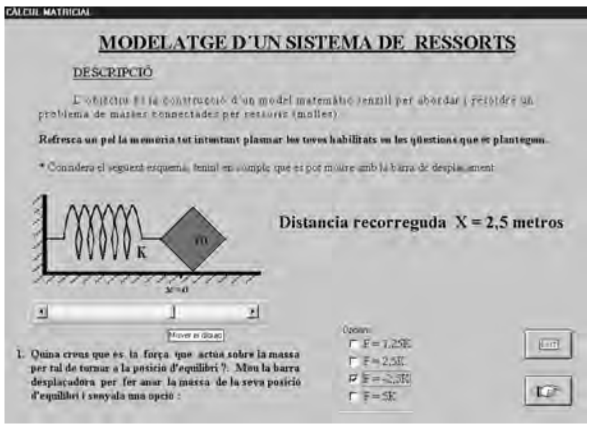


Figura 3

los conceptos matemáticos involucrados, y simultáneamente aprenden la utilidad de los elementos matemáticos construidos.

Los proyectos

En las unidades didácticas, los alumnos trabajan guiados en las aulas y construyen modelos locales.

En los proyectos tienen que identificar el modelo global y trabajar sobre el modelo. Para ello, es imprescindible el trabajo fuera de las aulas y en grupo, ya que este tipo de práctica requiere la búsqueda de información: desde distintas áreas de conocimiento que se encuentran involucradas pasando por consultas de libros de texto y tutorías.

Los proyectos tienen, por consiguiente, una componente pedagógica distinta a las unidades didácticas: una componente de investigación global.

Los proyectos propuestos en el dominio del álgebra lineal corresponden a los contenidos de diagonalización y se presentan a partir de problemas reales. Una vez realizados los proyectos, éstos son defendidos públicamente en el aula siendo valorados por los compañeros. La valoración se realiza en unos formularios donde se recogen principalmente aspectos de presentación, adquisición de conocimientos, claridad en la exposición y material aportado. A continuación citaremos los principales proyectos desarrollados.

Los proyectos propuestos en el dominio del álgebra lineal corresponden a los contenidos de diagonalización y se presentan a partir de problemas reales.

Proyecto1. Estudio del crecimiento de una población de conejos

En el mismo, los alumnos tienen que buscar la información adecuada para hallar la llamada matriz de crecimiento y a partir de las técnicas de diagonalización establecer, mediante el cálculo de vectores propios, la población óptima de conejos.

Proyecto 2

Se estudia sistemáticamente un hipotético caso del crecimiento de un virus informático regido por la sucesión de Fibonacci. Los alumnos tienen que hallar el término general, para ello producen la potencia n-ésima de una matriz.

Proyecto 3

Se plantea un problema de circuitos eléctricos en donde aparece una ecuación diferencial de segundo orden. Para su resolución se les dirige al cálculo de la matriz exponencial.

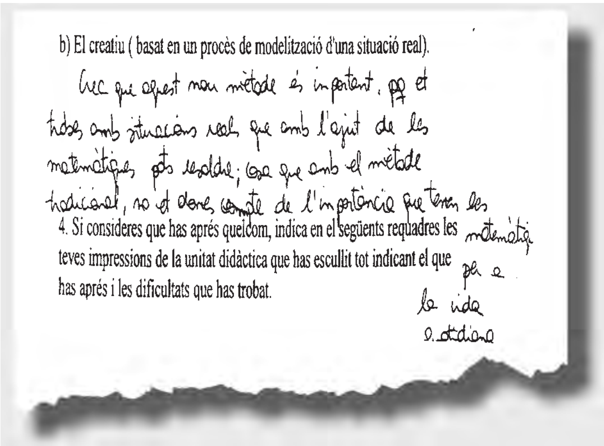
Selección y registro de datos de aprendizaje de una muestra de estudiantes

En el desarrollo de la investigación, hemos registrado datos cognitivos (producción de conocimientos matemáticos), epistemológicos (connotaciones matemática-realidad) y heurísticos (como conjunto de habilidades para solucionar los problemas matemáticos involucrados), de todos los alumnos de los cursos mencionados con el fin de establecer resultados fiables de la metodología. Hemos seleccionado cinco alumnos para analizar con profundidad su proceso de aprendizaje. Con el fin de no perder generalidad, los alumnos han sido seleccionados proporcionalmente a su procedencia académica (cuatro de ellos de COU y uno de formación profesional). Los resultados de cada uno han sido graficados con el fin de tener una visión global del proceso de aprendizaje (Gómez, 1998), en el que destacamos su desarrollo en los periodos inicial, medio y final, en las componentes cognitivas, heurísticas y epistemológicas, valorados en tres grados o niveles (poco, aceptable, muy buena).

Autoinstrucción del profesor investigador y detalle de diversos instrumentos utilizados en la investigación

Durante la investigación es vital el papel del profesor. El profesor debe tener claro en todo momento los estadios de trabajo y sus limitaciones, procurando ser lo menos subjetivo posible. Debe poseer conocimientos no propios de matemáticas (aspectos tecnológicos), con el fin de establecer los lazos entre la situación extra-matemática y el modelo. El profesor investigador anota diariamente las incidencias y aspectos más destacados en un documento denominado *diario del profesor*, y, a su vez, elabora una *ficha de cada alumno* con un resumen de los aspectos cognitivos, epistemológicos y heurísticos más relevantes. La ficha de cada alumno permite ofrecer una visión rápida y global del proceso de aprendizaje y, a su vez, es un indicador de la eficacia de la metodología. Otro elemento destacado en la investigación es la preocupación del profesor en registrar las opiniones de los alumnos de forma escrita, este hecho se realiza mediante los denominados *cuestionarios*. En ellos se reflejan aspectos sobre la enseñanza tradicional, comparación de metodologías, y, además, se utiliza para descubrir los conocimientos previos que posee el alumno. Con ello podemos establecer criterios comparitivos sobre el proceso de enseñanza/aprendizaje y establecer resultados sobre la viabilidad de la metodología (Gómez, 1998). En la figura 4 vemos una muestra de comentarios establecidos en los cuestionarios por los estudiantes.

Consideramos oportuno incluir en el presente artículo diversos comentarios realizados por los propios alumnos, con el fin de mostrar el grado de implicación en la metodología. Mostramos a continuación (figura 5) argumentos proporcionados por los alumnos que avalan la necesidad de la inclusión de la modelización matemática en los curriculos.


b) El creatiu (basat en un procès de modelització d'una situació real).

Crec que aquest nou mètode és important, pq et trobes amb situacions reals que amb l'ajut de les matemàtiques pots resoldre; crec que amb el mètode tradicional, no et dones compte de l'importància que tenen les matemàtiques per a la vida cotidiana

4. Si consideres que has aprés quelcom, indica en el següents requadres les teves impressions de la unitat didàctica que has escullit tot indicant el que has aprés i les dificultats que has trobat.

Figura 4. Opiniones de los estudiantes

He aprendido a construir matrices y su utilidad en aplicaciones cotidianas.

He aprendido aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana de un ingeniero.

El beneficio de estas experiencias será una nueva y mejor docencia.

Todo parte de las matemáticas. En la enseñanza tradicional no se contempla la utilidad de las matemáticas en la vida real.

Prefiero la inclusión de las técnicas de modelización, es un método más creativo. En él observas en qué ámbito puedes aplicar lo que has aprendido. En el método tradicional sólo ves temario y no aplicación.

El modelaje es un método importante porque presenta situaciones reales que puedes resolver matemáticamente.

El trabajo en grupo hace participar a los alumnos en clase y ayuda a hallar aplicaciones prácticas de la teoría.

Realizando un proyecto se aprende el tema muy bien, ya que resuelves un problema buscando tú la información.

Figura 5. Opiniones aportadas por los alumnos

También hemos utilizado para la investigación la *encuesta oficial* que anualmente realiza la Universidad y el documento denominado *diario de sesiones* (figura 6). La encuesta oficial posee la característica de ser anónima, este hecho nos proporciona criterios para establecer y comparar las respuestas de los estudiantes; en el hecho de ser anónima existe el peligro de que las respuestas no sean coincidentes con las realizadas de forma no anónima. Es gratificante observar la coincidencia en las respuestas; este hecho es un indicador fiable (las respuestas no están en contradicción) que refuerza las conjeturas. El diario de sesiones, es un documento que cumplimenta el alumno. En él se recogen los puntos –a criterio del estudiante– más importantes del tema, el grado de utilidad, los aspectos que quedan claros y a su vez los que quedan oscuros y una aproximación a la utilidad del tema en su formación académica. Por consiguiente, el diario de sesiones permite registrar datos tema por tema, tanto de la metodología como del proceso de aprendizaje.

…el diario de sesiones permite registrar datos tema por tema, tanto de la metodología como del proceso de aprendizaje.

Finalmente, otro instrumento de investigación utilizado es el *examen*. El examen es un elemento que permite averiguar de una forma individualizada y personal la interpretación de esquemas técnicos y las habilidades matemáticas en la resolución del modelo (figura 7).

Nom: *Tema:* *Data inici:* *Data final:*

1. Quins creus que són els punts més importants del tema?
2. Creus que tenen alguna utilitat?
3. Detalla els aspectes que han quedat clars.
4. Detalla els aspectes que han quedat foscos.
5. Pel que fa a l'ensenyament, creus que la forma d'exposar el tema té alguna diferència amb l'ensenyament tradicional.
6. Creus que el què has après te utilitat en la teva carrera, o fins i tot en la teva futura vida professional?

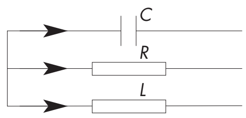
Figura 6. Diario de sesiones

Considerem la següent matriu :

$$\begin{pmatrix} -(3+a) & 2 & a \\ 2 & -(2+b) & b \\ 4 & 5 & -(a+b+3) \end{pmatrix}$$

a) Per quins valors dels paràmetres a i b representa la matriu de rigidesa d'un sistema de resorts? (2 punts)
b) Pels valors trobats, representa graficament el sistema de masses i resorts que modelitza. (2,5 punts)
c) Si les masses s'han vellugat respectivament dues unitats, quant val la força obtinguda? (2.5 punts)
d) Suposa ara que totes les components de la força obtinguda prenen el valor de 4 unitats, quina es la matriu d'elasticitat? (3 punts)

Sigui el circuit elèctric següent:



a) Raoneu el perquè aquest circuit està descrit pel sistema d'equacions:

$$\begin{pmatrix} I' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \qquad \text{(0.5 punts)}$$

b) Demostreu que els valors propis de la matriu del sistema són reals i iguals si $L = 4R^2C$. (1 punt)
c) Sigui $R = 1$, $L = 4$, $C = 1$. Si $I(0) = 4$ i $V(0) = 2$, quant valen la intensitat de corrent i la diferència de potencial a qualsevol instant? (1.5 punts)

Figura 7. Muestra del examen

Resultados

Resultados de la experimentación

Durante el desarrollo de la experiencia, el profesor investigador ha utilizado diversos instrumentos para establecer resultados. Entre ellos destacan el registro en vídeo y audio de las actuaciones de los estudiantes, y la posterior transcripción por parte del profesor. Los elementos mencionados, conjuntamente con las respuestas aportadas por los estudiantes en las unidades didácticas, proyectos y cuestionarios permiten establecer resultados acerca de las producciones matemáticas y el grado de implicación matemática-realidad, así como la eficacia del proceso de enseñanza/aprendizaje en contraposición a la enseñanza tradicional.

…los resultados enumerados proporcionan información sobre aspectos heurísticos, epistemológicos y cognitivos…

Los resultados de la experimentación pueden resumirse en los siguientes puntos:

1. Se consigue una mejor conexión con el mundo real. Tradicionalmente, las matemáticas aparecen desvinculadas de la realidad.
2. La enseñanza tradicional mantiene excesivos formalismos que se alejan de la realidad inmediata del futuro ingeniero. En la modelización se evita la carga de formalismo, apostando por un aprendizaje más intuitivo y próximo a los problemas de la técnica.
3. El modelaje es una herramienta de aprendizaje eficiente:
   - 3.1. Los alumnos aprenden de una manera espontánea, dirigida y agradable.
   - 3.2. Los estudiantes ven la utilidad de lo que aprenden.
   - 3.3. Los estudiantes ven la necesidad de las matemáticas para resolver problemas, deduciendo ellos mismos las herramientas.
   - 3.4. Los alumnos manifiestan una fuerte motivación.
   - 3.5. Los estudiantes adquieren una actitud creativa.
   - 3.6. Los estudiantes desarrollan la habilidad en el uso de las matemáticas en situaciones no matemáticas.

En síntesis, los resultados enumerados proporcionan información sobre aspectos heurísticos, epistemológicos y cognitivos, como consecuencia de aplicar la metodología. Hemos entendido por heurísticos, el conjunto de habilidades adquiridas en el análisis empírico como proceso de abstracción en la construcción del modelo; por epistemológicos, la influencia observada en el proceso de aprendizaje de los alumnos de la modelización como herramienta para resolver problemas de la vida cotidiana (utilitarismo); y por cognitivo, el grado de conocimiento adquirido a nivel de producciones matemáticas. Estos resultados han sido graficados de forma puntual (tema por tema, figura 8) y de forma global (figura 9). Dichas gráficas nos proporcionan una visión rápida de los aspectos mencionados.

En cuanto a las aportaciones en la mejora de la calidad docente se consigue la visión del modelaje como herramienta para resolver problemas de la vida cotidiana y que la metodología proporciona las producciones matemáticas necesarias para el currículo del ingeniero. Argumento que avala la necesidad de incluir la metodología de la modelización matemática como herramienta docente en los currículos académicos.

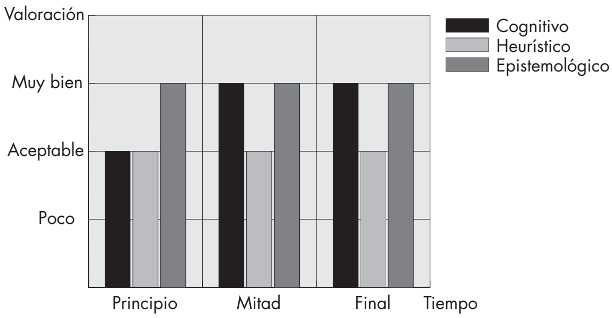


Figura 8. Resultados cualitativos

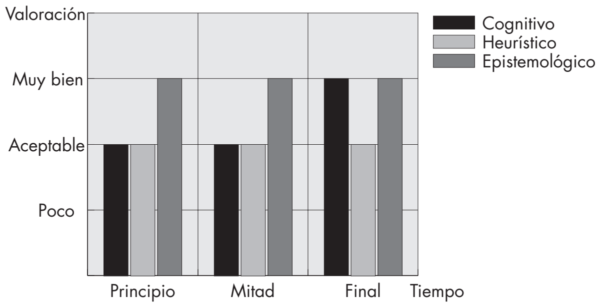


Figura 9. Resultados cualitativos globales

Las producciones matemáticas las podemos concretar en los siguientos aspectos: los alumnos son capaces de reconocer diversos tipos de matrices y adquirir una familiarización con la terminología matemática. Consolidar conocimientos: operaciones con matrices, sistemas de ecuaciones lineales, determinantes. Adquirir conocimientos nuevos de álgebra lineal: polinomio característico, valor y vector propio, diagonalización. Estos conocimientos se adquieren de una manera más profunda y de calidad que de la manera tradicional que es rutinaria, ya que se presentan en el contexto usual de la especialidad. Reconocimiento y familiarización de una ecuación diferencial y su tipología: orden, campo de pendientes, lineal, homogénea, homogénea de segundo orden, sistema de ecuaciones diferenciales, matriz exponencial.

Conclusiones generales

Como fruto de las discusiones anteriores, resaltamos las siguientes conclusiones generales en el ámbito de la innovación didáctica

1. Las aplicaciones y el modelaje matemático constituyen una forma de motivación e ilusión de los alumnos. Se observa el sentido de los temas estudiados.
2. El modelaje es una componente cultural. El modelaje proporciona conocimientos que usualmente no se encuentran en los currículos de matemáticas; en nuestro caso, los estudiantes descubren la existencia de un proyecto espacial denominado *Columbia*, la biografía de Robert Hooke, etc., elementos de cultura general no proporcionados clásicamente en las clases de matemáticas.
3. El modelaje constituye una forma de aprendizaje significativo. Construcción en contraposición a la memorización. En la experiencia, por citar un ejemplo, los alumnos producen una matriz inversa a partir de una situación técnica; hecho bastante lejano de la memorización de algoritmos.
4. El modelaje es una forma de reconocer estructuras. Los alumnos reconocen diversas situaciones, distantes en la vida real, pero con el mismo modelo matemático de denominador común.
5. El modelaje proporciona una visión diferente e integradora de las matemáticas. En la metodología del modelaje se engloban diversas áreas de conocimiento, no solamente de matemáticas, de manera que no se presentan los temas de forma aislada.

…el modelaje es una herramienta innovadora de enseñanza eficiente, y una correa de transmisión que proporciona la adquisición de conocimiento y establece hermandad entre matemática y realidad.

En síntesis, podemos afirmar que *el modelaje es una herramienta innovadora de enseñanza eficiente, y una correa de transmisión que proporciona la adquisición de conocimientos y establece hermandad entre matemática y realidad.*

Recomendaciones para futuras investigaciones

A raíz de la experimentación consideramos oportuno presentar orientaciones para posteriores estudios relativos al tema. Las recomendaciones están orientadas al papel que debe asumir el profesor como investigador.

1. Establecer un estadio inicial y final de trabajo. Es decir, marcar el dominio y definir claramente los objetivos y delimitaciones.
2. Acotación de las situaciones y prudencia en la elección de problemas no matemáticos. Con ello destacamos que la tipología de problemas y situaciones reales no son fácilmente matematizables, y hay que tener en consideración los conocimientos técnicos previos que posee el alumno. Por lo tanto, es preciso tener claro los criterios de selección de situaciones.
3. Predisposición al diálogo con otros profesores de otras áreas de conocimiento. Este argumento se fundamenta en coordinar contenidos curriculares y averiguar las necesidades de la especialidad.
4. Referenciar las clases y los ejercicios a las situaciones estudiadas. Con ello no se desvincula el diálogo matemática-realidad.
5. Interpelar a los alumnos en las aulas y fomentar el debate. Es una manera de enriquecer el aprendizaje.
6. Atribuir especial atención a las actividades de modelización, seleccionar comentarios y registrar los aspectos más relevantes. Con ello se consigue estudiar con mayor profundidad el proceso de aprendizaje.
7. Considerar el trabajo del profesor como orientador de las actividades y discusión de las mismas, no como un simple orador y calificador.
8. El profesor ha de contribuir a facilitar recursos y poseer un elevado grado de disponibilidad.

Nuevas líneas de investigación

Como nuevas líneas de investigación en este ámbito de innovación didáctica en educación matemática a nivel universitario destacamos las siguientes:

1. Impacto de las nuevas tecnologías. La implementación de las unidades didácticas en soporte informático permite economizar tiempo. ¿Qué resultados cognitivos diferenciados se obtendran en el perfi de aprendizaje de los alumnos?
2. Recopilación de situaciones técnicas susceptibles para implementar la metodología. El trabajo consistiría en realizar un inventario de situaciones óptimas en cada nivel educativo y establecer criterios y requisitos para incluir estas situaciones en los currículos de matemáticas (contextualización).
3. Influencia de la metodología en la eficacia del aprendizaje de otras asignaturas técnicas
4. Generalización de la experiencia a otras parcelas de las matemáticas. Consistiría en aplicar la metodología en ramas no necesariamente de álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.

Joan Gómez
Universidad Politécnica de Cataluña.
Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

Bibliografía

ABRANTES, P. (1994): *O Trabalho de Projecto e a Relaçao dos Alunos com a Matemática*, Tesis doctoral, Lisboa.

DE LANGE, J. (1993): «Assesment in Problem-oriented Curricula», en N. L. WEEB y COXFORD (eds.): *Assesment in the Mathematics classroom*, NCTM, Reston, 197-208

FORTUNY, J.M.ª y J. GÓMEZ (1998): <http://cc.uab.es/~ipdm1/TGOMEZ.ZIP>.

GÓMEZ, J. (1997): *La modelització com a eina didàctica per a l'ensenyament de les matemàtiques*, Publicacions UPC, Experiències de millora de la qualitat docent a la UPC, Barcelona.

GÓMEZ, J. (1998): *Contribució a l'estudi dels processos de modelització a l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a nivell universitari*, Tesis doctoral, UAB.

GÓMEZ, J. (2000): *Per un nou ensenyament de les matemàtiques*, CEAC.

LUSA, G. (1975): *Las matemáticas en la ingeniería*. ICE-UPC

NISS, M. y W. BLUM (1989): *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*, Ellis Horwood, Chichester.

PUIG ADAM, P. (1958): *Ecuaciones diferenciales*, Nuevas gráficas.

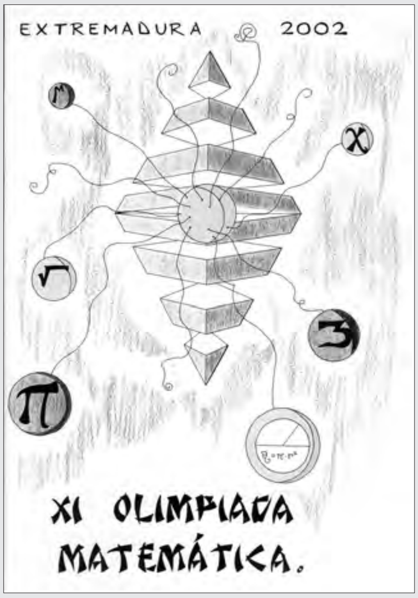
PUIG ADAM, P. (1979): *Cálculo integral*, Gráficas Lormo, Madrid. [17.ª edición.]

SKOVSMOSE, (1997). «Competencia democrática y conocimiento reflexivo en matemáticas», *EMA*, vol. 2, n.° 3, 191-216.

VALERO, P. (1994). «La educación matemática y la construcción de la democrácia». Una empresa docente, *EMA*, n.° 6.

VITHAL, R., I. CHRISTIANSEN y O. SKOVSMOSE (1995): *Project work in university mathematics education*. Alborg University. Denmark.

PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES



SUMA 42
febrero 2003, pp. 47-59

Las centenas cuadriculadas: *un* material matemáticamente potente *para ilustrar el tránsito de la Aritmética al Álgebra*

Fredy E. González
Francisco Ruiz López

ARTÍCULOS

Se presentan los resultados de una experiencia realizada con estudiantes para profesores de secundaria en torno a las posibilidades que tiene la centena cuadriculada, o tabla de los números naturales del 1 al 100, para realizar el paso de la aritmética al álgebra. Las actividades favorecen que los estudiantes adquieran los siguientes objetivos: reconocer y describir patrones numéricos, usar variables para expresar relaciones matemáticas, formular y probar conjeturas, y comunicar ideas matemáticas.

LOS RESULTADOS de las evaluaciones que se hacen a los alumnos de las escuelas e institutos en relación con su rendimiento en Matemáticas, frecuentemente son desalentadores. En general, ellos no logran superar los niveles aprobatorios mínimos. Ésta es una situación demasiado extendida que crea la necesidad de diseñar opciones cuya implantación procure coadyuvar al incremento de la pericia que poseen los estudiantes para la realización de actividades propias de la matemática. Para ello, resulta conveniente examinar la situación con más detalle con objeto de precisar los factores de mayor incidencia; uno de éstos, a nuestro juicio, está relacionado con las concepciones de los profesores acerca de lo que es la matemática, su enseñanza y evaluación. Destacamos dos perspectivas en relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. En la primera de ellas, denominada «tradicional», la matemática es vista como un gran conjunto de expresiones simbólicas y fórmulas, cuyo aprendizaje consiste en el re-conocimiento de algoritmos que permitan transformar unas expresiones simbólicas en otras, siendo en este caso el papel del *enseñante* el de limitarse a presentar esos algoritmos, lograr que los alumnos los retengan y evaluar la capacidad de éstos para reproducirlos. Se trata de lograr un isomorfismo entre *lo visto* en clase, lo *evaluado* en los exámenes y lo *reproducido-devuelto* por los alumnos, es decir, se trata de la clásica rutina *teoría-ejemplos-ejercicios* que se basa en transmitir información para que el estudiante la registre y sea capaz de repetirla. En esta *visión reproductivista* del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática predomina una visión estática y cerrada.

La intencionalidad de este enfoque presupone una *in-competencia* del alumno, que por sí mismo, no es capaz de acceder al conocimiento, y es preciso brindárselo desde fuera, donde se ubica el docente, quien opera como un proveedor de estímulos, conocimientos que han de «ponerse en la cabeza» de los estudiantes, quienes han de reaccionar ante tales estímulos mediante una respuesta que es valorada y, en consecuencia, reforzada o rechazada por el docente, según sea o no isomorfa con un patrón esperado previamente establecido.

Frente a este modelo tradicional, poco a poco, se ha venido construyendo una perspectiva diferente, la cual suscribe otra visión acerca de lo que significa «saber matemáticas», y ofrece una reconceptualización del rendimiento en matemática, asumiéndolo como la pericia en la ejecución de los procesos propios del quehacer matemático. Estos procesos se desarrollan a partir de la participación activa y consciente en «tareas intelectualmente exigentes» (González, 1998), que le permiten a los alumnos explorar ideas matemáticas en contextos de enseñanza y aprendizaje matemáticamente enriquecedores, contemplando una amplia variedad de nociones matemáticas, y posibilitan el ejercicio de procesos próximos al quehacer matemático. Este tipo de tareas hace posible que los alumnos aprendan matemática explorando y evaluando ideas, elaborando conjeturas, comunicándose, razonando, analizando y pensando acerca de su propio proceso de aprendizaje de esta materia. Desde este punto de vista, son deseables las proposiciones didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas que hagan posible que los alumnos:

- Desarrollen una valoración positiva hacia las Matemáticas.
- Incrementen razonablemente la confianza en su aptitud propia para desempeñar tareas específicas del quehacer matemático.
- Mejoren su capacidad para resolver problemas matemáticos.
- Amplíen su habilidad para comunicarse matemáticamente.
- Alcancen una adecuada pericia en el desarrollo de razonamientos matemáticos.
- Establezcan conexiones entre diversos campos de la matemática.

Este contexto conlleva ampliar el alcance de lo que significa «saber matemáticas», lo que implica, no sólo saber manejar algoritmos, sino además: (a) comprensión de las bases conceptuales mínimas de la matemática, (b) habilidad para comunicar ideas matemáticas a otros, (c) capacidad para razonar matemáticamente, (d) familiaridad con el uso de diversificar herramientas tecnológicas para aprender y hacer matemáticas. Así que, como alternativa al enfoque «tradicional», se formula otro que plantea que la educación matemática debe propender a que los estudiantes sean competentes para:

El campo general en el que se desenvuelve la investigación en Pensamiento Numérico comprende el estudio de los diferentes sistemas cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significado utilizando diferentes estructuras numéricas.

- Dotar de significado a las ideas matemáticas.
- Dilucidar si una idea es matemáticamente correcta o no.
- Razonar matemáticamente
- Realizar conjeturas, inventar y resolver problemas.
- Establecer conexiones entre distintos campos de la matemática y con el acontecer cotidiano.

Para lograr lo anterior se precisa que en el aula se desarrollen actividades adecuadas a tales fines, y es en esta dirección en la que se orientó la experiencia que en este artículo se relata.

Marco teórico

Ubicamos este trabajo, en primer lugar, en el marco de la línea de estudio e investigación dentro de la educación de la matemática que se denomina *pensamiento numérico y algebraico*, y se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos, tanto en el medio escolar como en el social. El campo general en el que se desenvuelve la investigación en Pensamiento Numérico comprende el estudio de los diferentes sistemas cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significado utilizando diferentes estructuras numéricas (Rico y otros, 1997).

Las tareas que proponemos a los estudiantes son tareas no convencionales de tipo aritmético y algebraico, y el planteamiento y resolución de dichas actividades tienen que ver con el llamado «sentido numérico», concepto utilizado en los *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática* (NCTM, 1991), que en el *Informe Cockcroft* (1985) figura como «sentido del número» y al que Wirtz (1974) se refiere como «simpatía por los números». No existe una caracterización del sentido numérico que sea universalmente aceptada, sin embargo podemos asumir la visión global que proporciona Howden (1989):

El sentido numérico puede ser descrito como una buena intuición sobre los números y sus relaciones. Se desarrolla gradualmente como consecuencia de explorar números, visualizándolos en una variedad de contextos, y relacionándolos de maneras que no están limitadas por algoritmos tradicionales.

Pensamos que difícilmente los futuros profesores podrán fomentar el sentido numérico en sus alumnos si ellos previamente no se ejercitan en destrezas que permiten reflexionar desde diferentes puntos de vista sobre los números y sus relaciones.

El objeto matemático en el que centramos la experiencia es la *centena cuadriculada*, o tabla que contiene los números naturales del 1 al 100 dispuestos en 10 filas y 10 columnas (figura 1). Las tablas numéricas constituyen un medio excelente para plantear tareas con el objeto de identificar patrones numéricos, y conjeturar, descubrir y probar propiedades aritméticas y algebraicas.

Las tablas numéricas constituyen un medio excelente para plantear tareas con el objeto de identificar patrones numéricos y conjeturar, descubrir y probar propiedades aritméticas y algebraicas.

La noción de *patrón*, entendido como regularidad que se forma a partir de un núcleo generador, ocupa hoy día un lugar central en las matemáticas. Así, gran parte de los matemáticos están de acuerdo en concebir la matemática como «la ciencia o el estudio de los patrones» (Devlin, 1994). Para Stewart (1995) vivimos en un universo de patrones. El instinto del científico es tratar de comprender el mundo natural, y el del matemático es estructurar ese proceso buscando la regla, la norma, la estructura, es decir, el patrón.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 1. Centena cuadriculada tipo 1

La actividad de reconocer y trabajar con patrones en tablas numéricas está directamente ligada con la *matemática visual* y con el pensamiento visual. En general, hay consenso entre investigadores y especialistas en que el desarrollo de las capacidades que caracterizan el pensamiento visual proporciona a los alumnos nuevos caminos para pensar y hacer matemáticas. Zimmerman y Cuningham (1991) recogen diversas investigaciones en torno a la visualización, y concluyen que los alumnos tienen una alta tendencia a pensar algebraicamente más que visualmente, incluso cuando se les fuerza a utilizar un proceso visual. Los autores explican este hecho aludiendo a razones tales como: «el proceso visual es más difícil que el analítico, lo visual se considera menos sólido para la enseñanza o lo visual no es matemático», según algunos matemáticos, profesores de matemáticas e incluso alumnos.

En nuestro trabajo planteamos tareas motivadoras con el fin de propiciar el descubrimiento y la conjetura, a través de «visualización» de regularidades o patrones numéricos y propiedades matemáticas, de manera que este hecho sirva de motivación para realizar representaciones simbólicas adecuadas que faciliten la demostración de algunas propiedades aritméticas y algebraicas.

Litwiller y Duncan (1980, 1986) proponen actividades variadas sobre tablas numéricas como la tabla de sumar, la tabla de restar, la tabla de multiplicar y la centena cuadriculada o tabla-100, término éste utilizado por Ruiz (2000) en el estudio de dicha tabla para obtener representaciones geométricas para conceptos aritméticos. Si bien se trata de un objeto didáctico que no presenta mayor dificultad de uso en el aula, sí hay que tener en cuenta que su estudio desde un punto de vista matemático formal escapa al ámbito escolar.

Descripción de la experiencia

Este trabajo de innovación curricular, ha sido llevado a cabo con un grupo de estudiantes para profesor de secundaria (EPP) en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) (Núcleo Maracay). La estructura curricular de los estudios que debe realizar en la UPEL, quien aspire a convertirse en profesor de matemática para educación secundaria, contempla los siguientes componentes: (a) Formación general; (b) Formación pedagógica; (c) Formación especializada; y (d) Práctica profesional. Los tres primeros constituyen la base común de la formación del egresado. El componente de formación especializada se refiere específicamente a las asignaturas de Matemática y de Educación Matemática. En relación con esta última se contempla el curso de *Introducción a la Educación Matemática* en el cual el futuro profesor tiene la oportunidad de vincularse con un conjunto de estrategias orientadas al logro de experiencias de aprendizajes sistematizadoras y formalizadoras que favorezcan el dominio de los conocimientos de las diversas disciplinas y propicien una actitud positiva hacia las Matemáticas, así como también de diseñar, desarrollar y evaluar situaciones didácticas y secuencias instruccionales relativas a los tópicos de los programas de matemática del nivel secundario y, al mismo tiempo, diseñar y participar en proyectos de investigación relativos a la enseñanza de la matemática. Este curso es parte del componente de Formación Especializada, se desarrolla durante cinco sesiones semanales de clase con una duración de cuarenta y cinco minutos cada una, en un «período académico» de dieciséis semanas. La experiencia a la que se refiere este artículo se llevó a cabo durante el periodo 2001-1 (marzo-julio); en ella participaron diecinueve alumnos (diez mujeres y nueve hombres), con una edad promedio de veinte años.

Los alumnos prepararon su propio plan individualizado de evaluación, seleccionando entre las actividades que se muestran seguidamente:

1. *Trabajo individual* (TI: 20 %).
2. *Cuaderno de notas* (CN: 30 %): registro escrito, diario y pormenorizado de las fases preactiva, activa y postactiva correspondiente a cada uno de los encuentros presenciales de trabajo (sesiones de clase).
3. *Reseña de artículo* (RA: 5 %): resumen escrito acerca del contenido de algún artículo referido a la Educación Matemática publicado en alguna revista de las que se encuentran en el Centro de Información y Documentación de la institución.
4. *Miniproyecto matemático* (MPM: 15 %): trabajo sencillo de investigación documental referido a un tema matemático señalado por el profesor o convenido, de común acuerdo, entre el alumno y el profesor.
5. *Ensayo libre* (EL: 10 %): trabajo monográfico de tema escogido libremente por el alumno en relación con la Educación Matemática, tal como se estudió en clase.
6. *Proyecto pedagógico de aula* (PPA: 20 %): elaboración de un Proyecto Pedagógico de Aula, según algún contenido matemático de lo estudiado en el curso.
7. *Miniproyecto educación matemática* (MPEM 20%): trabajo sencillo de investigación referido a algún asunto de la Educación Matemática señalado por el profesor o convenido, de común acuerdo, entre el alumno y el profesor.
8. Ensayo didáctico (ED: 15%).
9. Asistencia (A: 5%).

Era objetivo principal del miniproyecto didáctico de educación matemática denominado «centenas cuadriculadas», que los estudiantes realizaran actividades propias del quehacer matemático, tales como: identificar regularidades y patrones numéricos, elaborar y verificar conjeturas, proponer enunciados de teoremas y, finalmente, demostrar tales teoremas.

Entre los miniproyectos didácticos de educación matemática, el profesor propuso el trabajo con las centenas cuadriculadas, mediante el cual se invitaba a los alumnos a intentar hacer matemática a partir de materiales sencillos, mediante la reflexión y la abstracción, y que fue asumido por siete de los alumnos participantes en el curso. Los resultados de su actuación son los que en este artículo se relatan.

Era *objetivo principal* del miniproyecto didáctico de educación matemática denominado «centenas cuadriculadas», *que los estudiantes realizaran actividades propias del quehacer matemático, tales como: identificar regularidades y patrones numéricos, elaborar y verificar conjeturas, proponer enunciados de teoremas y, finalmente, demostrar tales teoremas*. Para ello se les proporcionó un «material matemáticamente potente» como son las Centenas Cuadriculadas, ya que presentan las siguientes tres características que definen a este tipo de material: (a) están al alcance de casi cualquier persona, (b) son de muy bajo costo o fáciles de fabricar, (c) conllevan implícito un conjunto de nociones o procesos propios de la Matemática. El uso adecuado de las centenas cuadriculadas, por parte del profesor, puede permitir que sus estudiantes desarrollen habilidades para:

1. Reconocer y describir patrones numéricos.
2. Usar variables para expresar relaciones matemáticas.
3. Formular y probar conjeturas.
4. Comunicar ideas matemáticas.

Para trabajar con las centenas cuadriculadas, en este caso, se propusieron a los estudiantes las actividades que se señalan a continuación:

- Explorar las centenas cuadriculadas y señalar algunos usos que pueda dárseles.
- Trabajando por parejas, desarrollar las actividades que se indican en cada una de las hojas que contienen una centena cuadriculada.

- Trabajando en parejas, construir otras versiones de centenas cuadriculadas e identificar en ellas patrones numéricos (si es que hay alguno).
- Reunidos en grupo total, compartir ideas, discutir hallazgos, y resolver diferencias de opinión, si es que hay alguna.

Este procedimiento fue formulado del modo como se expone en la figura 2.

Centena cuadriculada (tipo 1)

En esta figura se ha dibujado un cuadrado alrededor del 12; esta figura será llamada *cuadrado de cuatro puntos alrededor de 12* porque como vértices tiene los cuatro números, 2, 13, 22, y 11, y como centro tiene al número 12. Dibuje y denomine otros cuadrados de cuatro puntos. ¿Cuál es la relación existente entre los vértices y el centro? Elabore una conjetura y trate de demostrarla.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 2. Cuadrado de cuatro puntos

La *primera actividad* que se planteó a los estudiantes consistió en pedirles que señalaran la mayor cantidad posible de nociones matemáticas que ellos observaran en la centena cuadriculada. Fue una especie de juego libre y manipulación despreocupada. Se les dijo que podían hacer referencia a cualquier aspecto matemático que ellos percibieran, por muy obvio que pareciese. La intención de esta actividad fue hacerles reflexionar sobre los aspectos matemáticos que encierra la centena cuadriculada.

Entre las respuestas aportadas por los estudiantes destacamos las de Maiyelines, María y Efraín:

> Contiene los números consecutivos desde el 1 hasta el 100. Es un cuadrado. Puede ser dividida en triángulos y rectángulos, por tanto tiene ángulos. Su diagonal principal lleva los números ordenados de 11 en 11, desde el 1 hasta el 100. Su diagonal secundaria, lleva los números ordenadamente de 9 en 9, desde el 10 hasta el 91. Tiene filas y columnas. Cada columna tiene 10 números ordenados consecutivamente de 1 en 1. Cada fila tiene 10 números ordenados de 10 en 10. Se observa la relación «mayor que»: $a > b$, si b está en una de las filas anteriores a a y en una de las columnas anteriores a a. Tiene la forma de una matriz. (Maiyelines)
>
> Éstos son números naturales que van aumentando progresivamente de uno en uno hasta completar una cantidad de 10 números por fila y 10 números por columna, empezando con el número 1 y terminando la fila 10 con el número 100. La tabla me llama la atención por su sencillez y me invita a pensar en todo lo que se puede hacer con los números que constituyen la centena cuadriculada y qué aspectos matemáticos se pueden resaltar en ella. Nos permite conocer algo más allá de los números naturales y de las operaciones básicas que ellos nos permiten efectuar; por ejemplo, entrelazarlos de diferentes maneras, construyendo figuras geométricas conocidas entre ellos. Tomando debidamente los puntos que indican sus vértices y la unión de éstos para formar los lados de dicha figura. También nos permite analizar conceptos o aspectos matemáticos que se visualizan con facilidad. (María)
>
> Números naturales desde el 1 hasta el 100. Matriz, 10×10, 10 filas y 10 columnas. Figuras geométricas notables (triángulo, cuadrado, rectángulo). Diagonales, coordenadas. Progresiones aritméticas. Grupos y Subgrupos. Números Naturales y Números Enteros Positivos. Sistemas de Coordenadas. Conjuntos, índices. Relaciones de Orden. (Efraín)

Las observaciones anteriores se mantienen en los aspectos relacionados con la forma de la centena, su contenido, el ámbito al que se refieren los números. Hay manifestaciones relacionales explícitas, como por ejemplo, la noción de orden, sin embargo, no se aprecia aún la percepción de la estructura profunda de la centena cuadriculada, es decir, del modelo matemático subyacente, sobre el cual se soportan relaciones de mayor contenido matemático existentes entre los números ubicados en las celdillas que componen la centena cuadriculada. Para ello fue necesario conducirlos hacia la búsqueda de una relación entre el valor del elemento dentro de cada celdilla y la posición de ésta en el contexto de la centena cuadriculada, visualizándola como una *matriz de orden 10×10*.

Recurrimos entonces a la notación matricial, y con ello comenzamos a recorrer el tránsito de lo aritmético hacia lo algebraico, puesto que ya necesitaríamos apelar a notaciones simbólicas para expresar relaciones más generales. La representación matricialmente de la Centena Cuadriculada se muestra en la figura 3.

La tarea, ahora, consistió en pedir a los estudiantes que trataran de establecer alguna relación entre el número incluido en una celdilla cualquiera y la posición de ésta dentro de la centena cuadriculada. Se hicieron varias veri-

$a_{1\,1}$	$a_{1\,2}$	$a_{1\,3}$	$a_{1\,4}$	$a_{1\,5}$	$a_{1\,6}$	$a_{1\,7}$	$a_{1\,8}$	$a_{1\,9}$	$a_{1\,10}$
$a_{2\,1}$	$a_{2\,2}$	$a_{2\,3}$	$a_{2\,4}$	$a_{2\,5}$	$a_{2\,6}$	$a_{2\,7}$	$a_{2\,8}$	$a_{2\,9}$	$a_{2\,10}$
$a_{3\,1}$	$a_{3\,2}$	$a_{3\,3}$	$a_{3\,4}$	$a_{3\,5}$	$a_{3\,6}$	$a_{3\,7}$	$a_{3\,8}$	$a_{3\,9}$	$a_{3\,10}$
$a_{4\,1}$	$a_{4\,2}$	$a_{4\,3}$	$a_{4\,4}$	$a_{4\,5}$	$a_{4\,6}$	$a_{4\,7}$	$a_{4\,8}$	$a_{4\,9}$	$a_{4\,10}$
$a_{5\,1}$	$a_{5\,2}$	$a_{5\,3}$	$a_{5\,4}$	$a_{5\,5}$	$a_{5\,6}$	$a_{5\,7}$	$a_{5\,8}$	$a_{5\,9}$	$a_{5\,10}$
$a_{6\,1}$	$a_{6\,2}$	$a_{6\,3}$	$a_{6\,4}$	$a_{6\,5}$	$a_{6\,6}$	$a_{6\,7}$	$a_{6\,8}$	$a_{6\,9}$	$a_{6\,10}$
$a_{7\,1}$	$a_{7\,2}$	$a_{7\,3}$	$a_{7\,4}$	$a_{7\,5}$	$a_{7\,6}$	$a_{7\,7}$	$a_{7\,8}$	$a_{7\,9}$	$a_{7\,10}$
$a_{8\,1}$	$a_{8\,2}$	$a_{8\,3}$	$a_{8\,4}$	$a_{8\,5}$	$a_{8\,6}$	$a_{8\,7}$	$a_{8\,8}$	$a_{8\,9}$	$a_{8\,10}$
$a_{9\,1}$	$a_{9\,2}$	$a_{9\,3}$	$a_{9\,4}$	$a_{9\,5}$	$a_{9\,6}$	$a_{9\,7}$	$a_{9\,8}$	$a_{9\,9}$	$a_{9\,10}$
$a_{10\,1}$	$a_{10\,2}$	$a_{10\,3}$	$a_{10\,4}$	$a_{10\,5}$	$a_{10\,6}$	$a_{10\,7}$	$a_{10\,8}$	$a_{10\,9}$	$a_{10\,10}$

Figura 3. Expresión matricial de la centena cuadriculada

ficaciones, se formularon y probaron algunas conjeturas y, al final se obtuvo que

$$a_{ij} = (i-1)10 + j, \ \forall\, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Esta notación permitió avanzar más hacia el campo algebraico.

La figura 4 recoge patrones cuadrados con los vértices en una celdilla de la centena cuadriculada. Ahora la tarea consistía en averiguar si existía o no alguna relación que vinculara a los «vértices» con el «centro» del «cuadrado». Luego de varias verificaciones se formuló la siguiente conjetura:

La relación consiste en que, dado un cuadrado de cuatro puntos, si sumamos sus cuatro vértices y la suma se divide por el centro, el resultado es cuatro, una constante.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 4. Cuadrados con cuatro puntos con centro

La conjetura anterior fue verificada con cada uno de los «cuadrados de cuatro puntos» indicados en la figura 4 y con otros señalados por los estudiantes; todo ello permitió reformular la conjetura y darle forma al siguiente «teorema»:

> **Teorema 1**
>
> Dada una centena cuadriculada de tipo 1, se tiene que para todo «cuadrado de cuatro puntos» se cumple que el promedio de sus «vértices» es igual a su «centro».

Para poder demostrar esto, resultó necesaria una generalización aún mayor que la anterior; fue así como se presentó la centena cuadriculada de tipo 1 en la forma como se muestra en la figura 5

Con este dispositivo, ya se podía demostrar el Teorema 1.

Para ello fue conveniente plantear una situación genérica, tal como se muestra en la figura 6.

$a_{1\,1}$	$a_{1\,2}$	$a_{1\,3}$	…	$a_{1\,(j-1)}$	$a_{1\,j}$	$a_{1\,(j+1)}$	…	$a_{1\,8}$	$a_{1\,9}$	$a_{1\,10}$
$a_{2\,1}$	$a_{2\,2}$	$a_{2\,3}$	…	$a_{2\,(j-1)}$	$a_{2\,j}$	$a_{2\,(j+1)}$	…	$a_{2\,8}$	$a_{2\,9}$	$a_{2\,10}$
$a_{3\,1}$	$a_{3\,2}$	$a_{3\,3}$	…	$a_{3\,(j-1)}$	$a_{3\,j}$	$a_{3\,(j+1)}$	…	$a_{3\,8}$	$a_{3\,9}$	$a_{3\,10}$
$a_{4\,1}$	$a_{4\,2}$	$a_{4\,3}$	…	$a_{4\,(j-1)}$	$a_{4\,j}$	$a_{4\,(j+1)}$	…	$a_{4\,8}$	$a_{4\,9}$	$a_{4\,10}$
$a_{5\,1}$	$a_{5\,2}$	$a_{5\,3}$	…	$a_{5\,(j-1)}$	$a_{5\,j}$	$a_{5\,(j+1)}$	…	$a_{5\,8}$	$a_{5\,9}$	$a_{5\,10}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$a_{(i-1)\,1}$	$a_{(i-1)\,2}$	$a_{(i-1)\,3}$	…	$a_{(i-1)\,(j-1)}$	$a_{(i-1)\,j}$	$a_{(i-1)\,(j+1)}$	…	$a_{(i-1)\,8}$	$a_{(i-1)\,9}$	$a_{(i-1)\,10}$
$a_{i\,1}$	$a_{i\,2}$	$a_{i\,3}$	…	$a_{i\,(j-1)}$	$a_{i\,j}$	$a_{i\,(j+1)}$	…	$a_{i\,8}$	$a_{i\,9}$	$a_{i\,10}$
$a_{(i+1)\,1}$	$a_{(i+1)\,2}$	$a_{(i+1)\,3}$	…	$a_{(i+1)\,(j-1)}$	$a_{(i+1)\,j}$	$a_{(i+1)\,(j+1)}$	…	$a_{(i+1)\,8}$	$a_{(i+1)\,9}$	$a_{(i+1)\,10}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$a_{8\,1}$	$a_{8\,2}$	$a_{8\,3}$	…	$a_{8\,(j-1)}$	$a_{8\,i}$	$a_{8\,(j+1)}$	…	$a_{8\,8}$	$a_{8\,9}$	$a_{8\,10}$
$a_{9\,1}$	$a_{9\,2}$	$a_{9\,3}$	…	$a_{9\,(j-1)}$	$a_{9\,i}$	$a_{9\,(j+1)}$	…	$a_{9\,8}$	$a_{9\,9}$	$a_{9\,10}$
$a_{10\,1}$	$a_{10\,2}$	$a_{10\,3}$	…	$a_{10\,(j-1)}$	$a_{10\,i}$	$a_{10\,(j+1)}$	…	$a_{10\,8}$	$a_{10\,9}$	$a_{10\,10}$

Figura 5. Generalización de la centena cuadriculada de tipo 1

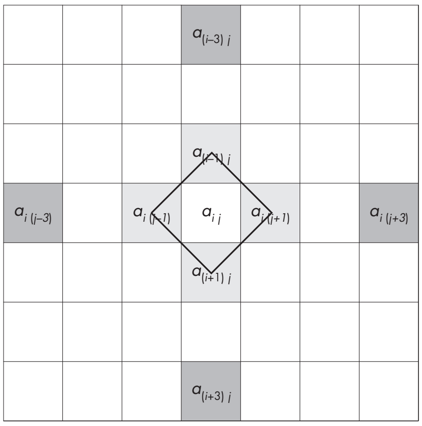


Figura 6. Representación genérica de un cuadrado de cuatro puntos con su respectivo centro

Lo que se desea es demostrar que el promedio de los vértices coincide con el centro, es decir:

$$\frac{a_{i(j-1)} + a_{(i-1)j} + a_{i(j+1)} + a_{(i+1)j}}{4} = a_{ij}$$

Efectivamente, dado que

$$a_{ij} = (i-1)10 + j, \quad \forall\, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

se tiene entonces que:

$$\frac{a_{i(j-1)} + a_{(i-1)j} + a_{i(j+1)} + a_{(i+1)j}}{4} =$$

$$= \frac{[(i-1)10 + (j-1)] + [(i-2)10 + j] + [(i-1)10 + (j+1)] + [10i + j]}{4} =$$

$$= \frac{40i - 40 + 4j}{4} = \frac{4[(i-1)10 + j]}{4} = a_{ij}$$

Nótese que no ha sido necesario recurrir a la centena cuadriculada (terreno aritmético) sino que se ha trabajado con las notaciones y relaciones algebraicas que poco a poco se han ido introduciendo. A partir de aquí los estudiantes fueron invitados a que exploraran la centena cuadriculada y formularan conjeturas en la búsqueda de nuevas relaciones algebraicas existentes entre sus elementos. Fue así como Maiyelines formuló las siguientes tres conjeturas:

Conjetura 1

Sean a y b números naturales cualesquiera, entre 1 y 50; se tiene entonces que $(a + b)$ siempre pertenece a la cuadrícula.

Conjetura 2

Sean a y b dos números de la cuadrícula; se tiene entonces que $(a - b) = 10$ si y sólo si a y b pertenecen a la misma columna y b pertenece a la fila i, mientras que a pertenece a la fila $(i-1)$; es decir: si $a \in a_{(i-1)j}$ y $b \in b_{ij}$, entonces $(a - b) = 10$.

Conjetura 3

La suma de los elementos de cualquiera de las filas es un múltiplo de 5, es decir:

$$\sum_{j=1}^{10} a_{ij} = 5n, \quad n \in \mathbb{N}$$

El paso siguiente consistía en verificar estas conjeturas y tratar de demostrarlas genéricamente; así se hizo, al menos en el caso de la conjetura 3:

Sea F el conjunto de todas las filas de la centena cuadriculada: $F = \{f_i / 1 \leq i \leq 10\}$.

Sea $f_i = \{a_{ij} / 1 \leq j \leq 10\}$; $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Entonces

$$\sum_{j=1}^{10} a_{ij} = 5n, \text{ donde } n \in \mathbb{Z}$$

En efecto:

$$\sum_{j=1}^{10} a_{ij} = \sum_{j=1}^{10} [(i-1)10 + j] = \sum_{j=1}^{10} [(i-1)10] + \sum_{j=1}^{10} j =$$

$$= 10i - 10 + 55 = 10i + 45 = 5(2i + 9)$$

Sabemos que $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, entonces $i \in \mathbb{Z}$, $2 \in \mathbb{Z}$ y $9 \in \mathbb{Z}$; por tanto, $5(2i + 9) \in \mathbb{Z}$.

Además de Maiyelines, otros alumnos también se animaron a buscar sus propios teoremas; fue así como Eneida formuló el siguiente

Teorema de Eneida

Dada una centena cuadriculada; si se considera un triángulo isósceles cuyos vértices sean a_{ij}, $a_{(i+3)(j+3)}$, $a_{(i+3)(j-3)}$; entonces el centro del triángulo (figura 7) viene dado por la trisección de la suma de sus vértices, es decir, el centro del triángulo es $a_{(i+2)j}$.

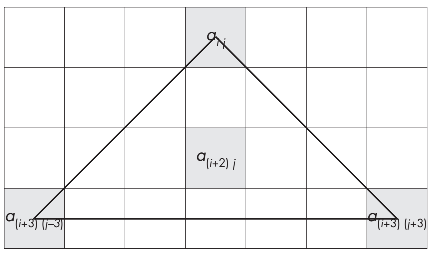


Figura 7. Triángulo isósceles

Demostración

Considérese un triángulo isósceles cuyos vértices sean a_{ij}, $a_{(i+3)(j+3)}$, $a_{(i+3)(j-3)}$; donde $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

En este caso se cumple que:

$$a_{ij} + a_{(i+3)(j+3)} + a_{(i+3)(j-3)} =$$
$$= [(i-1)10 + j] + [(i+2)10 + (j-3)] + [(i+2)10 + (j+3)] =$$
$$= [(i-1) + 2(i+2)]10 + [j + (j-3) + (j+3)] =$$
$$= (3i+3)10 + 3j = (i+1)3 \cdot 10 + 3j$$

Por lo tanto:

$$\frac{a_{ij} + a_{(i+3)(j-3)} + a_{(i+3)(j+3)}}{3} = \frac{(i+1)\cdot 3 \cdot 10 + 3j}{3} =$$
$$= (i+1)10 + j = [(i+2) - 1]10 + j = a_{(i+2)j}$$

Eneida, después de haber demostrado «su teorema» se planteó otros interrogantes:

¿Qué ocurrirá cuando, en vez de un triángulo isósceles con las características dadas, tengamos un isorrectángulo (triángulo rectángulo isósceles)? ¿Será acaso que todo se genera de la descomposición poligonal de los rombos que encontramos dentro de la centena cuadriculada?

Veamos el siguiente ejemplo (figura 8).

El centro del rombo es 36. Además, el rombo lo podemos descomponer en triángulos isósceles, siendo uno de ellos el de vértices 6, 33 y 39, y con el teorema de Eneida, podemos calcular su centro que es 26. Del mismo modo se puede descomponer el rombo en triángulos isorrectángulos. Si, por ejemplo, tomamos el de vértices 6, 33 y 36, al sumar los números de sus vértices y dividir por tres, se obtiene 25. Si tomamos el triángulo de vértices 6, 36 y 39, los sumamos, y dividimos por tres, se obtiene 27. Y así se repite en el resto de los casos para obtener los centros 45 y 47.

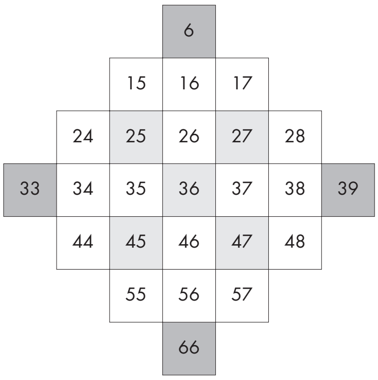


Figura 8. Rombo

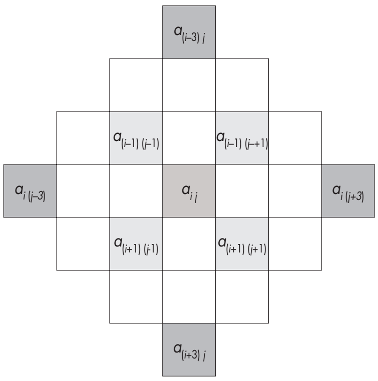


Figura 9. Rombo en forma matricial

Nótese que los cuatro centros de los triángulos isorrectángulos forman un cuadrado, cuyo promedio de vértices es 36; es decir, el centro del rombo que tomamos inicialmente.

Veamos ahora la *conjetura formulada por María:*

En todo cuadrado de «lado» dos, de «vértices contiguos», la suma de los vértices sobre la diagonal principal es igual a la suma de los vértices sobre la diagonal secundaria.

Demostración

En la figura 10 se puede apreciar que:

$$a_{(i-1)\,(j-1)} + a_{i\,j} =$$
$$= [(i-2)10 + (j-1)] + [(i-1)10 + j] =$$
$$= [(i-2)10 + j] + [(i-1)10 + (j-1)] =$$
$$= a_{(i-1)j} + a_{i(j-1)}$$

La producción algebraica de los alumnos fue abundante. Para lograrlo se les pidió que trabajaran en forma independiente fuera de clase, y que procuraran encontrar otras relaciones diferentes a las estudiadas en clase y distintas de las de sus compañeros. Así fue como trabajaron Efraín, Roselyn y José. A continua-

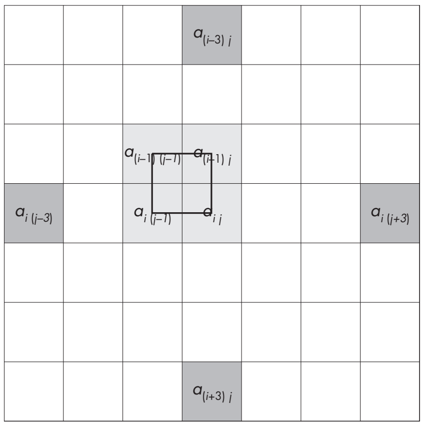


Figura 10. Cuadrado de lado dos

La producción algebraica de los alumnos fue abundante. Para lograrlo se les pidió que trabajaran en forma independiente fuera de clase, y que procuraran encontrar otras relaciones diferentes a las estudiadas en clase y distintas de las de sus compañeros.

ción mostramos el resultado del trabajo de estos tres estudiantes.

Efraín demostró tener una imaginación matemática importante, de hecho él forma parte del equipo universitario de ajedrez y en algunos campeonatos ha sido «primer tablero». Sus apreciaciones iniciales al pedírsele que observara la centena cuadriculada fueron las siguientes:

> Números naturales desde el 1 hasta el 100. Matriz, 10×10, 10 filas y 10 columnas. Figuras geométricas notables (triángulo, cuadrado, rectángulo). Diagonales, coordenadas. Progresiones aritméticas. Grupos y subgrupos. Números naturales y números enteros positivos. Sistemas de coordenadas. Conjuntos, índices. Relaciones de orden.

Nótese que mencionó algunos aspectos no evidentes sino que formaban parte de la estructura profunda de la centena, es decir, de su modelo matemático subyacente. Esto hacía esperar conjeturas de naturaleza mucho más compleja que las anteriores. En efecto, la *primera conjetura que Efraín* formula establece que:

Los elementos situados en las diagonales ascendentes de una centena cuadriculada de tipo 1, constituyen los términos de una progresión aritmética de razón –9.

Nótese la introducción del concepto de *diagonal ascendent*e; dos ejemplos de ella se muestran en la figura 11.

Demostración de la conjetura 1 de Efraín

Sean a y b dos elementos consecutivos cualesquiera de una Centena Cuadricualada situados en una de las diagonales ascendentes. Queremos demostrar que su diferencia $(b - a)$ es una constante (en este caso, –9). Si a y b son dos elementos cualesquiera de una centena cuadriculada de tipo 1 situados consecutivamente en una de las diagonales ascendentes; entonces podemos suponer, sin pérdida alguna de generalidad, que: $a = a_{ij}$ y $b = a_{(i-1)(j+1)}$

Por lo tanto:

$$(b - a) = [(i - 1 - 1)10 + (j + 1)] - [(i - 1)10 + j\,] = -9$$

Además de lo anterior, Efraín introduce la noción de «triángulo isorrectángulo», ejemplificada en la figura 12.

A partir de aquí, Efraín formula su *segunda conjetura*:

El promedio de los vértices de un «triángulo isorrectángulo», en una Centena Cuadriculada de Tipo 1, es igual a su centro.

Demostración

Si a_{ij} es el «centro» de un «triángulo isorrectángulo» en una Centena Cuadriculada de Tipo; entonces, sus «vértices» serán: $a_{(i-1)(j-2)}$, $a_{(i-1)(j+1)}$, $a_{(i+2)(j+1)}$; por lo tanto:

$$\frac{[(i-1-1)10+(j-2)]+[(i-1-1)10+(j+1)]+[(i+2-1)10+(j+1)]}{3} =$$

$$= \frac{10i - 20 + j - 2 + 10i - 20 + j + 1 + 10i + 20 - 10 + j + 1}{3} =$$

$$= \frac{30i - 30 + 3j}{3} = \frac{3[(i-1)10 + j]}{3} = (i-1)10 + j = a_{ij}$$

A estas alturas, Efraín se atreve a formular el siguiente ejercicio: Replicar la demostración anterior para el «trián-

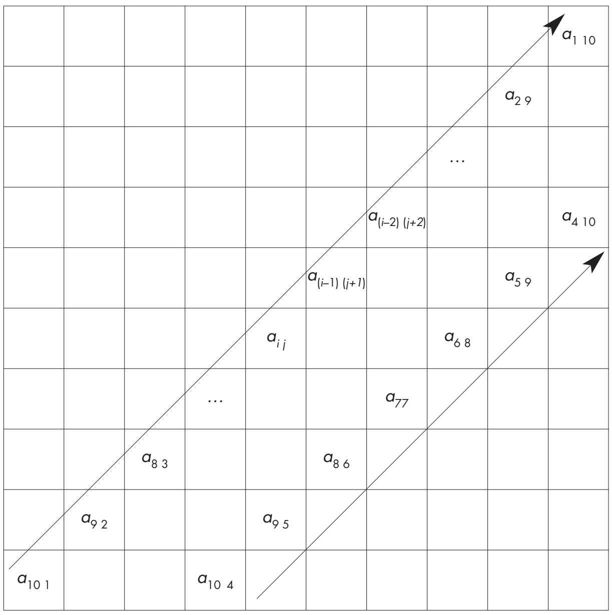


Figura 11. Dos ejemplos de diagonal ascendente

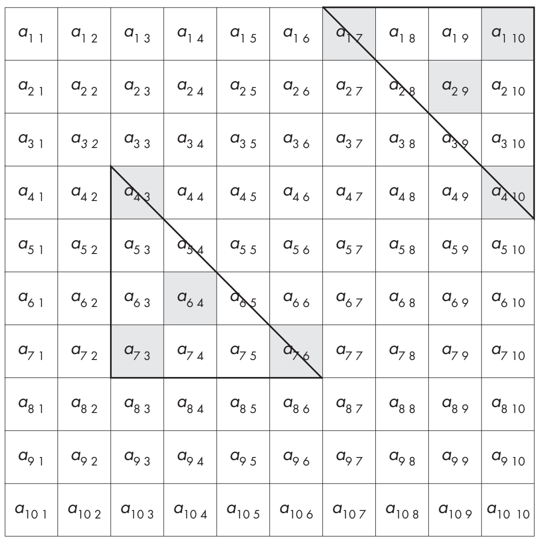


Figura 12. Dos ejemplos de «triángulos isorrectángulos», con sus respectivos «centros»

gulo Isorrectángulo» cuyo «centro» sea $a_{(i+2)(j+1)}$, llegando, incluso a introducir algunas definiciones como las de «cuadrado principal», «cuadrado encajado» y «cuadrado encajado degenerado». Seguidamente se presentan dichas definiciones:

- En una centena cuadriculada de tipo 1, se dedomina *cuadrado principal* a todo «cuadrado» de lado n, con $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- En una centena cuadriculada de tipo 1, se dedomina *cuadrado encajado* dentro de un cuadrado principal de lado n» a todo «cuadrado» de lado $m = (n - 2)$; por tanto, se tiene que m, el lado de un cuadrado encajado de lado n, es tal que $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- Se denomina *cuadrado encajado degenerado* a un cuadrado encajado de lado 1, es decir, aquel que está constituido por un único punto.

En la figura 13, se muestran ejemplos de cuadrado principal» y «cuadrado encajado.

$a_{1\,1}$	$a_{1\,2}$	$a_{1\,3}$	$a_{1\,4}$	$a_{1\,5}$	$a_{1\,6}$	$a_{1\,7}$	$a_{1\,8}$	$a_{1\,9}$	$a_{1\,10}$
$a_{2\,1}$	$a_{2\,2}$	$a_{2\,3}$	$a_{2\,4}$	$a_{2\,5}$	$a_{2\,6}$	$a_{2\,7}$	$a_{2\,8}$	$a_{2\,9}$	$a_{2\,10}$
$a_{3\,1}$	$a_{3\,2}$	$a_{3\,3}$	$a_{3\,4}$	$a_{3\,5}$	$a_{3\,6}$	$a_{3\,7}$	$a_{3\,8}$	$a_{3\,9}$	$a_{3\,10}$
$a_{4\,1}$	$a_{4\,2}$	$a_{4\,3}$	$a_{4\,4}$	$a_{4\,5}$	$a_{4\,6}$	$a_{4\,7}$	$a_{4\,8}$	$a_{4\,9}$	$a_{4\,10}$
$a_{5\,1}$	$a_{5\,2}$	$a_{5\,3}$	$a_{5\,4}$	$a_{5\,5}$	$a_{5\,6}$	$a_{5\,7}$	$a_{5\,8}$	$a_{5\,9}$	$a_{5\,10}$
$a_{6\,1}$	$a_{6\,2}$	$a_{6\,3}$	$a_{6\,4}$	$a_{6\,5}$	$a_{6\,6}$	$a_{6\,7}$	$a_{6\,8}$	$a_{6\,9}$	$a_{6\,10}$
$a_{7\,1}$	$a_{7\,2}$	$a_{7\,3}$	$a_{7\,4}$	$a_{7\,5}$	$a_{7\,6}$	$a_{7\,7}$	$a_{7\,8}$	$a_{7\,9}$	$a_{7\,10}$
$a_{8\,1}$	$a_{8\,2}$	$a_{8\,3}$	$a_{8\,4}$	$a_{8\,5}$	$a_{8\,6}$	$a_{8\,7}$	$a_{8\,8}$	$a_{8\,9}$	$a_{8\,10}$
$a_{9\,1}$	$a_{9\,2}$	$a_{9\,3}$	$a_{9\,4}$	$a_{9\,5}$	$a_{9\,6}$	$a_{9\,7}$	$a_{9\,8}$	$a_{9\,9}$	$a_{9\,10}$
$a_{10\,1}$	$a_{10\,2}$	$a_{10\,3}$	$a_{10\,4}$	$a_{10\,5}$	$a_{10\,6}$	$a_{10\,7}$	$a_{10\,8}$	$a_{10\,9}$	$a_{10\,10}$

Figura 13. Dos ejemplos de cuadrado principal de lado $n = 4$, con sus respectivos cuadrados encajados de lado $(n - 2) = 2$

En relación con estas definiciones, Efraín formula el siguiente teorema:

Teorema de Efraín

En una centena cuadriculada de tipo 1, la semisuma de los «vértices» de un cuadrado principal de lado $n = 4$, es igual a la suma de los elementos de la diagonal principal de su cuadrado encajado.

$a_{(i-2)\,(j-1)}$			$a_{(i-2)\,(j+2)}$
	$a_{(i-1)\,j}$	$a_{(i-1)\,(j+1)}$	
	$a_{i\,j}$	$a_{i\,(j+1)}$	
$a_{(i+1)\,(j-1)}$			$a_{(i+1)\,(j+2)}$

Figura 14

Demostración

Consideremos la situación de la figura 14; sin pérdida alguna de generalidad, podemos afirmar que:

$$\frac{[(i+1-1)10+(j-1)]+[(i+1-1)10+(j+2)]}{2}+$$

$$+\frac{[(i-2-1)10+(j+2)]+[(i-2-1)10+(j-1)]}{2}=$$

$$=\frac{10i+j-1+10i+j+2+10i-30+j+2+10i-30+j-1}{2}=$$

$$=\frac{40i-60+4j+2}{2}=20i-30+2j+1=$$

$$=[(i-1)10+j]+[(i-1-1)10+(j+1)]=a_{ij}+a_{(i-1)(j+1)}$$

Veamos seguidamente los *aportes de Roselyn*. Las apreciaciones iniciales de ésta fueron las siguientes:

> En las cuadrículas se encuentran los números naturales desde el 1 hasta el 100. Los elementos ubicados en las cuadrículas que conforman la diagonal principal (en orden descendente) van de once en once. Los elementos ubicados en las cuadrículas que conforman la primera columna van de diez en diez. Los elementos ubicados en las cuadrículas que conforman la diagonal secundaria (en orden descendente) van de nueve en nueve. La centena cuadriculada puede dividirse en cuatro cuadrados congruentes. La centena cuadriculada puede dividirse en dos triángulos congruentes. La suma de dos números naturales cualesquiera pertenecientes a {1, 2, 3, ..., 48, 49, 50} pertenece a la Centena Cuadriculada. La diferencia entre el elemento que pertenece a una cuadrícula y el que pertenece a la cuadrícula inmediatamente superior (es decir, está en la misma columna pero en la fila anterior) es diez. La suma de los elementos que pertenecen a las cuadrículas que constituyen una fila es múltiplo de cinco.

Nótese la varieda y riqueza de observaciones, algunas apreciables a simple

Nótese la varieda y riqueza de observaciones, algunas apreciables a simple vista y otras de carácter relacional (algebraicas).

vista y otras de carácter relacional (algebraicas).

Roselyn también formuló conjeturas; una de ellas fue la siguiente:

La diferencia entre la suma de los elementos que constituyen dos filas consecutivas es cien; es decir:

$$\sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{j=1}^{10} a_{(i-1)j} = 100,$$

$$i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \; i \neq 1$$

Apréciese que $a_{ij} = a_{(i-1)j} + 10$, $\forall\, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Demostración

Consideremos la situación de la figura 15. Lo que queremos demostrar es:

$$\sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{j=1}^{10} a_{(i-1)j} = 100,$$

$$i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \; i \neq 1$$

En efecto:

$$\sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{j=1}^{10} a_{(i-1)j} = \sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{j=1}^{10} (a_{ij} - 10) =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{j=1}^{10} a_{ij}\right] - \sum_{j=1}^{10} (-10) = \sum_{j=1}^{10} 10 = 10 \cdot 10 = 100$$

$a_{(i-1)\,1}$	$a_{(i-1)\,2}$	$a_{(i-1)\,3}$	...	$a_{(i-1)\,(j-1)}$	$a_{(i-1)\,j}$	$a_{(i-1)\,(j+1)}$	...	$a_{(i-1)\,8}$	$a_{(i-1)\,9}$	$a_{(i-1)\,10}$
$a_{i\,1}$	$a_{i\,2}$	$a_{i\,3}$	...	$a_{i\,(j-1)}$	$a_{i\,j}$	$a_{i\,(j+1)}$	...	$a_{i\,8}$	$a_{i\,9}$	$a_{i\,10}$
$a_{(i+1)\,1}$	$a_{(i+1)\,2}$	$a_{(i+1)\,3}$	...	$a_{(i+1)\,(j-1)}$	$a_{(i+1)\,j}$	$a_{(i+1)\,(j+1)}$	...	$a_{(i+1)\,8}$	$a_{(i+1)\,9}$	$a_{(i+1)\,10}$

Figura 15

Finalmente, veamos la *producción de José*, quien introdujo la noción de cuadrado simétrico con respecto a los lados de la centena cuadriculada de tipo 1; ejemplos de Cuadrados Simétricos se aprecian en la figura 16; con base en esta noción, José formula el siguiente teorema:

Teorema de José

La suma de los vértices de todo «Cuadrado Simétrico con respecto a los lados de la Centena Cuadriculada de tipo 1» es constantemente igual a 202.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 16. Se observan tres cuadrados de vértices simétricos con respecto a los lados de la centena cuadriculada

Demostración

En todo «cuadrado simétrico con respecto a los lados de la Centena cuadriculada de tipo 1», sus vértices vienen dados por a_{ii}, $a_{i(11-i)}$, $a_{(11-i)i}$, $a_{(11-i)(11-i)}$.

Por lo tanto se cumple que:

$$a_{ii},\ a_{i(11-i)},\ a_{(11-i)i},\ a_{(11-i)(11-i)}$$

$$= [(i-1)10 + i] + [(i-1)10 + (11-i)] + [(10-i)10 + i] +$$

$$+ [(10-i)10 + (11-i)] = 10i - 10 + i + 10i$$

$$—10 + 11 - i + 100 - 10i + i + 100 - 10i + 11 - i =$$

$$= (10 + 1 + 10 - 1 - 10 + 1 - 10 - 1) +$$

$$+ (-10 - 10 + 11 + 100 + 100 + 11) = 202.$$

Conclusiones

Con esta experiencia hemos pretendido poner de manifiesto que la Centena Cuadriculada es un «material matemáticamente potente». Su uso adecuado por parte del docente en el aula puede provocar en los estudiantes gratificantes hallazgos y hacer que ellos tengan comportamientos propios del quehacer matemático, como son: apreciar regularidades, identificar patrones, formular conjeturas, verificarlas, enunciar teoremas y demostrarlos. Existen diversas líneas de trabajo abiertas centradas en la Centena Cuadrículada, algunas de las cuales se refieren a las posibilidades de este material para realizar representaciones geométricas para conceptos aritméticos, y otras ponen énfasis en el paso de la aritmética al álgebra.

Hemos constatado, después de diversas experiencias tanto en Maracay (Venezuela) como en Granada (España), que este tipo de trabajo con estudiantes para profesor favorece una actitud más positiva hacia la Matemática y su enseñanza.

Referencias bibliográficas

COCKROFT, W. (1985): *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockroft*, MEC, Madrid.

DEVLIN, K. (1994): *Mathematics: The Science of Patterns*, Scientific American Library, Nueva York.

GONZÁLEZ, J.L. (1995): *El Campo Conceptual de los Números Naturales Relativos*, Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada.

HOWDEN, H. (1989): «Teaching Number Sense», *Arithmetic Teacher,* v. 36, n.° 6, 6-11.

LITWILLER, B.H. y D.R. DUNCAN (1980): *Activities for the maintenance of computational skills and the discovery of patterns*, NCTM, Reston, Virginia.

LITWILLER, B.H. y D.R. DUNCAN (1986): «The extended subtraction table: a search for number patterns», *Arithmetic Teacher*, v. 33 n.° 9, pp. 28-31.

NCTM (1991): *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*, Addenda Series, Nivel Inicial, SAEM Thales, Sevilla.

RICO, L., E. CASTRO, E. CASTRO, M. CORIAT e I. SEGOVIA (1997): «Investigación, Diseño y Desarrollo Curricular», en L. RICO (ed.): *Bases Teóricas del Curriculum de Matemáticas en Educación Secundaria*, Síntesis, Madrid.

RUIZ, F. (2000): *La Tabla-100. Representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación*, Tesis doctoral, Departmento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada.

STEWART, I. (1995): *Nature's Numbers. Discovering order and pattern in the Universe*, Weidenfeld and Nicholson, Londres.

WIRTZ, R. (1974): *Matahematics for Everyone*, Curriculum Development Associates, Washington.

ZIMMERMANN, W. y S. CUNNINGHAM (1991): «Visualization and the nature of Mathematics», en W. ZIMMERMENN y S. CUNNINGHAM (eds.): *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Mathematical Association of America. Washington.

Anexo. Centenas Cuadriculadas de tipos diferentes a la de Tipo 1

Centena cuadriculada (tipo 2) (figura 17)

1. Sume los números en cada una de las cuatro primeras filas.
2. ¿Existe algún patrón en estas sumas? ¿Por qué ocurrirá?
3. Adivine y verifique las sumas correspondientes a las siguientes seis filas.
4. Repita los pasos 1, 2 y 3, pero trabajando por columnas.
5. Adivine y verifique los grandes totales de las sumas y las columnas.
6. ¿Por qué los grandes totales están relacionados en esa forma?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 17

Centena cuadriculada (tipo 3) (figura 18)

Antes de trabajar con la siguiente Centena, encuentre los siguientes tres términos de cada una de las siguientes secuencias numéricas. Hay más de una respuesta posible.

1. 1 20 21 40 41 __ __ __
2. 1 19 23 37 45 55 __ __ __
3. 10 12 28 34 __ __ __
4. Explore la centena dada.

5. ¿En qué difiere esta centena de la centena tipo 2.
6. Adivine y verifique las sumas de las primeras tres columnas.
7. ¿Por qué son iguales las sumas de las columnas en esta centena cuadriculada?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91

Figura 18

Centena cuadriculada (tipo 4) (figura 17)

1. Dibuje un cuadrado de cuatro puntos alrededor de 34. ¿Cuál es la media de los cuatro números en este cuadrado?
2. Experimente dibujando otros cuadrados de cuatro puntos y promedie los cuatro números en cada figura.
3. Dibuje un cuadrado de cuatro puntos cuyos números vértices sumen 296. ¿Cuál es el número que queda en el centro de este cuadrado?
4. Se denomina *suma del cuadrado* a la suma de los números vértices del cuadrado. ¿Pueden tener la misma suma dos cuadrados de cuatro puntos que sean distintos?
5. ¿Es posible dibujar cuadrados de cuatro puntos cuya suma sea 175 o 255?
6. Formule dos conjeturas acerca de los cuadrados de cuatro puntos y pruébelas.

Centena cuadriculada (tipo 5) (figura 19)

1. Use la variación de la Centena Cuadriculada que se muestra a continuación para hallar el resultado de las siguientes operaciones sin efectuar la adición

   1 + 2

   1 + 2 + 3

   ...

   1 + 2 + 3 + . . . + 8 + 9 + 10

   1 + 2 + 3 + . . . + 8 + 9 + 10 + 9

   1 + 2 + 3 + . . . + 8 + 9 + 10 + 9 + 8

   ...

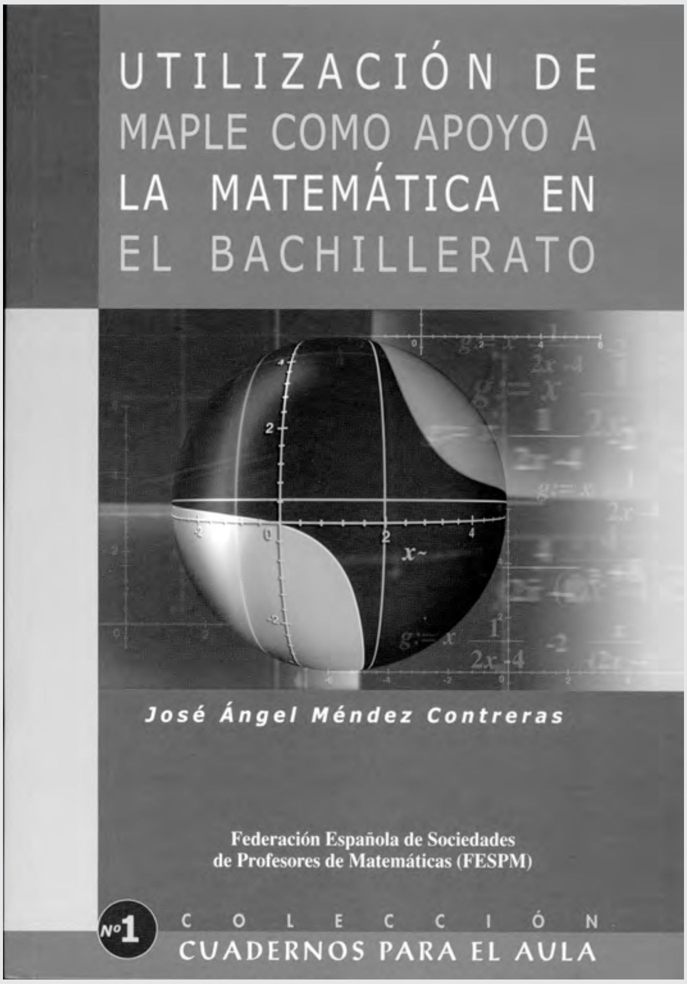
   1 + 2 + 3 + . . . + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 + . . . + 2 + 1
2. Explore esta Centena Cuadriculada. Comparta sus descubrimientos con los compañeros (Sugerencia: Estudie los patrones en las sumas de las filas y las columnas).

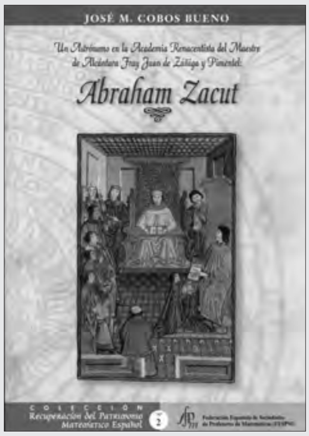
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
2	5	9	14	20	27	35	44	54	64
4	8	13	19	26	34	43	53	63	72
7	12	18	25	33	42	52	62	71	79
11	17	24	32	41	51	61	70	78	85
16	23	31	40	50	60	69	77	84	90
22	30	39	49	59	68	76	83	89	94
29	38	48	58	67	75	82	88	93	97
37	47	57	66	74	81	87	92	96	99
46	56	65	73	80	86	91	95	98	100

Figura 19

Fredy E. González
Universidad Pedagógica
Experimental Libertador.
Instituto Pedagógico
«Rafael Alberto Escobar Lara»
Maracay (Venezuela)
Francisco Ruiz
Departamento de Didáctica
de la Matemática.
Universidad de Granada.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

PUBLICACIONES DE LA FEDERACIÓN





SUMA 42
febrero 2003, pp. 61-68

Interacciones y aprendizaje en Matemáticas: análisis de una experiencia didáctica

Marcela Cristina Falsetti
Mabel Alicia Rodríguez
Adriana Judith Aragón*

ARTÍCULOS

De acuerdo con el interaccionismo simbólico (Godino y Llinares, 2000) asumimos que los aspectos culturales y sociales son una parte importante del aprendizaje matemático para nuestra población de estudiantes ingresantes a la universidad. Presentamos aquí una experiencia didáctica, realizada en el marco de un proyecto de investigación, en la que pretendemos observar y registrar los comportamientos y aprendizajes de estudiantes preuniversitarios de Matemáticas con relación a cierto tipo de interacciones intencionalmente provocadas y observables. Esta experiencia fue diseñada con la intención de hacer surgir una diversidad de interacciones alrededor de la realización de un problema, a través del cual se introducen los temas: función cuadrática y modelización usando la función cuadrática.

EN EL ÁMBITO educativo institucional, gran parte del aprendizaje se realiza, en general, a través de, o mejor dicho «gracias a», interacciones entre los actores que integran dicho ámbito. Nos referiremos particularmente en este trabajo a las interacciones en la clase de Matemáticas. Si asumimos que los aspectos culturales y sociales son una parte importante del aprendizaje matemático (Godino y Llinares, 2000), el docente, en sus programaciones, debería diseñar actividades, o adecuar o seleccionar entre las ya existentes, para que surjan interacciones. Cuando hablamos de interacciones nos referimos al intercambio comunicativo, recíproco y voluntario entre actores que participan de un acto intencionado como es el de enseñar o aprender. Dicho intercambio conlleva en sí mismo la potencialidad de provocar alguna transformación (en lo intelectual o en lo actitudinal) entre los sujetos participantes. El intercambio puede ser de experiencias, interpretaciones, opiniones, conocimientos, actitudes, etc., y están focalizados en un mismo objeto (problema, concepto, acción, etc.). Las interacciones en la clase pueden ser entre: docente-alumno, docente-colectivo (clase completa), alumno-alumno (por parejas o en grupo), docente-pequeño grupo, pequeño grupo-pequeño grupo. Resulta difícil para los actores, incluso para el docente, realizar un análisis profundo de las interacciones en las cuales se encuentra involucrado para reflexionar y obtener conclusiones sobre ellas. Por esta razón, contamos con poca información sobre los alcances de los distintos tipos de interacciones en el aprendizaje matemático.

Con la intención de indagar sobre este último aspecto nos propusimos diseñar una secuencia didáctica, organizada en una clase de dos horas, para obtener información sobre qué aprenden nuestros estudiantes preuniversitarios con

* Las tres autoras son integrantes del proyecto *Las relaciones interactivas en el aula en cursos introductorios de Matemática de la UNGS*, que recibe subsidio del Ministerio de Educación de la Nación (Argentina).

relación a ciertas interacciones provocadas y observables. A modo exploratorio aplicamos esta secuencia en dos grupos de, aproximadamente, veinte alumnos cada uno. La elaboración de la secuencia se adecua a las reglas de la llamada «ingeniería didáctica» (Douady, 1995) por cuanto la misma es concebida por un grupo de investigadores-docentes con el fin de llevar a cabo un proyecto de aprendizaje por interacciones que son reguladas por las intervenciones del profesor.

Elaboración de una secuencia didáctica para analizar interacciones

Criterios de elaboración

La secuencia presentada es para introducir los temas «función cuadrática» y «modelización por función cuadrática». Los alumnos tienen, al iniciar esta actividad, práctica en el trabajo en forma grupal y colectiva, resolviendo problemas. Acaban de estudiar los temas «funciones» y «función lineal» bajo el contexto de modelización. Los criterios usados para diseñar la secuencia son los siguientes:

- Proponer una tarea compleja que demande habilidades múltiples en un lapso de tiempo acotado.
- Dar lugar a interacciones: entre alumnos en un grupo, entre grupos, entre el profesor y cada grupo, entre el profesor y el colectivo (la clase completa).
- Dar ciertas indicaciones al docente sobre sus intervenciones durante la tarea asignada.
- Dar lugar al cambio productivo de opinión, a la reflexión sobre la tarea designada, a la confrontación ya sea entre grupos, entre el profesor y cada grupo, o entre el profesor y el colectivo.
- Que los cambios conceptuales que se den en cada alumno estén sustentados en mecanismos de validación que no dependan del profesor.
- Indicar al observador qué variables y acciones tiene que observar.
- Proponer, para la tarea asignada, algunos indicadores de aprendizaje a observar.

Estos criterios persiguen, por un lado, dar sentido al trabajo grupal y crear la condición de interdependencia y responsabilidad individual imprescindibles para el trabajo en pequeños grupos; por otro lado, se quiere garantizar que aparezcan los dos aspectos funcionales más importantes del trabajo en equipo que son: los aprendizajes que cada miembro del equipo logra individualmente y la producción grupal donde todos deben responder por un producto que represente a las producciones individuales (Shulman y otros, 1999).

Descripción de la secuencia

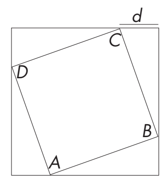
Proponemos trabajar sobre un problema en grupos formados espontáneamente. Debe haber un número par de grupos y con cinco integrantes a lo sumo en cada uno de ellos.

…se quiere garantizar que aparezcan los dos aspectos funcionales más importantes del trabajo en equipo que son: los aprendizajes que cada miembro del equipo logra individualmente y la producción grupal donde todos deben responder por un producto que represente a las producciones individuales…

En el momento de realizar la actividad se había ya enseñado y trabajado sobre Álgebra y Geometría elemental (campos numéricos, expresiones algebraicas, ecuaciones, construcciones geométricas, lugares geométricos, teorema de Thales, semejanza, teoremas de Pitágoras, trigonometría); sobre el concepto de función y su utilidad en la modelización; sobre funciones lineales y problemas modelizables a través de la función lineal (Almeida y otros, 2001; Falsetti y otros, 2001).

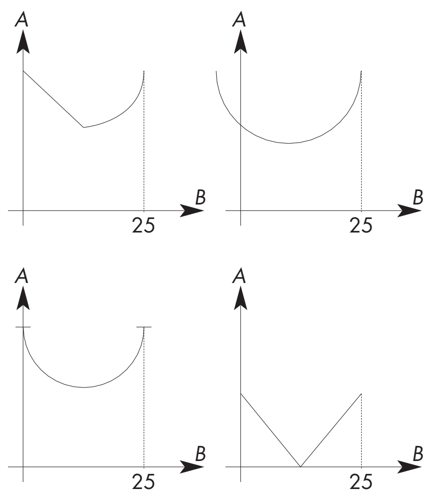
Problema

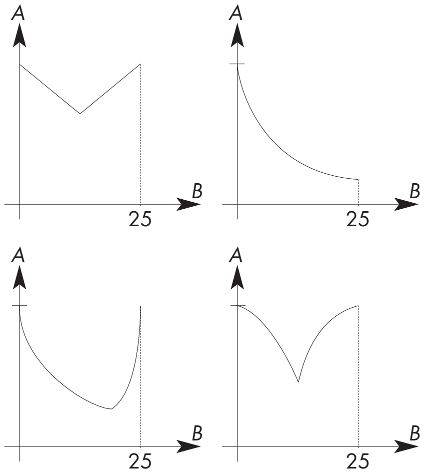
Se tiene un cuadrado de 25 cm de lado y se considera el cuadrado *ABCD* cuyos vértices están a una misma distancia *d* de los vértices del cuadrado original como indica la figura:



a) Construir otros cuadrados inscritos de forma análoga al *ABCD* para otros valores de *d*. Describir el comportamiento de las áreas de los cuadrados.

b) ¿Cuál de los siguientes gráficos puede corresponder a la representación del área del cuadrado que se forma en función de la distancia *d*?





Las consignas para dirigir la actividad en clase son:

1. Resolver en grupo la parte a) del problema dado.
2. Cada grupo deberá escribir en la pizarra la resolución. Una vez que todos hayan escrito su respuesta cada grupo deberá explicarla.
3. Resolver en grupo la parte b) del mismo problema. Explicitar, por escrito, las razones por las cuales cada uno de los gráficos ha sido *elegido* o *descartado.*
4. Entregar la producción al profesor.
5. Cada grupo recibirá del docente la producción de otro grupo, la cual deberá corregir indicando si está bien o no y explicando, al otro grupo, las razones *por escrito.*
6. Devolver a cada grupo su producción.
7. Analizar las correcciones hechas en la producción propia por el otro grupo, ¿harían algún cambio?

Todos los puntos deben estar desarrollados por escrito para entregarlos. Cada grupo debe entregar un único ejemplar al docente.

Cuadro 1

Analizaremos las instancias 1, 2, 3, 5, 7 con respecto a interacciones.

1. *Trabajo en cada grupo*

i) ¿Qué hace el profesor mientras los estudiantes comienzan a desarrollar la tarea?

El docente rotará por los grupos observando qué hacen los alumnos y, de ser necesario, los ayudará sin decir cómo se hace el problema.

ii) ¿Qué hace el observador?

Pasando por los grupos, el observador toma registro escrito y puede grabar. Proponemos que el observador al registrar tenga en cuenta los siguientes puntos:

- Qué conocimientos ya adquiridos ponen de manifiesto y cómo lo hacen.
- Dinámica grupal: cómo intervienen cada uno de los participantes, cuáles son los comentarios, qué decisiones se toman, etc.
- Qué escriben en el cuaderno, quiénes escriben, cómo traducen al lenguaje escrito lo que intercambian oralmente.
- El tipo de justificaciones (se pueden basar en: atributos del dibujo, propiedades deducidas a partir del dibujo como figura de análisis, explicación ligada al proceso operacional de producción de la solución, propiedades en general, etc.).

iii) Algunas formas de acción previstas para resolver la tarea

En relación con la matemática:

- Pueden probar con dos valores únicamente e inferir un mismo tipo de crecimiento para todo el dominio.
- Pueden probar con algunos valores e inferir el crecimiento y el decrecimiento.
- Pueden modelizar usando el teorema de Pitágoras y dar la expresión del área en función de *d.*

Pueden probar con dos valores únicamente e inferir un mismo tipo de crecimiento para todo el dominio.

Pueden modelizar usando el teorema de Pitágoras y dar la expresión del área en función de d.

En relación con la dinámica grupal:

- Interactuar con otro sujeto de modo que sirva a cada alumno para entender el problema, sistematizar sus conocimientos, seleccionar las estrategias, reflexionar, relacionar, etc.

iv) ¿Cuáles son los posibles indicadores de la evolución en el aprendizaje?

- El alumno (que probó con valores de manera que concluyó un determinado sentido de la desigualdad), *empieza a concebir* la variabilidad de las magnitudes, la dependencia entre ellas y, el tipo de dependencia.
- El alumno (que hasta el momento en el curso sólo estudió, con detalle matemático, las funciones lineales), comienza a concebir que un fenómeno pueda tener intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- El alumno es capaz de exponer con algún soporte (puede ser el gráfico) las diferencias respecto a los modelos estudiados anteriormente, más precisamente la «no proporcionalidad» en el proceso.

2. *Cada grupo expone*

i) ¿Qué hace el docente?

- Modera el intercambio.
- Propone, en caso de ser necesario, que sean dos o más compañeros de un mismo grupo los que expongan para todos lo realizado en el seno de su grupo.
- En caso de ser necesario, hace preguntas que crea que posibilitarían una mayor comprensión, sin pronunciarse al respecto ni hacer valoraciones.

ii) ¿Qué hace el observador?

Presta atención a:

- Qué y cómo comunica de manera escrita cada grupo su producción.
- Qué y cómo comunica de manera oral cada grupo su producción.
- La *exposición* del grupo observado en la instancia de producción grupal, *comparándola* con lo observado en el interior del mismo (como por ejemplo, qué es lo que ellos seleccionan para comunicar).
- La presencia o falta de justificaciones y a su tipología (como por ejemplo, si fueron lo suficientemente explícitos para los demás compañeros).
- Al tipo de comportamiento de los alumnos que no pertenecen al grupo que expone:
  - — si escuchan;
  - — si lo toman en cuenta;
  - — si consideran lo que dice el otro como un *pensamiento/razonamiento consistente y fundado* que los podría hacer cambiar de opinión.
- Cómo juega la valoración de las personas en el momento de escuchar la exposición.
- En qué medida consideran relevante lo hecho por sus compañeros en comparación con lo del docente.

iii) Algunas formas de acción previstas.

- Cada grupo escribe en la pizarra su producción y la explicará. Dentro de las posibles explicaciones unas serán de carácter más procesual y otras de carácter más general.
- Prever su postura ante el problema, pudiendo cambiarla o seguir sosteniendo la misma.

iv) ¿Cuáles son los posibles indicadores de la evolución en el aprendizaje?

- Cambio de opinión.
- Uso de expresiones y notación matemática.
- Mayor nivel de formulación de ciertas preguntas.
- Mayor nivel de justificación de la resolución.

Qué y cómo comunica de manera escrita cada grupo su producción.

Qué y cómo comunica de manera oral cada grupo su producción.

3. *Se resuelve en grupo la parte b) del problema*

En esta instancia sugerimos las mismas indicaciones que en la instancia 1 para el docente y el observador.

i) Algunas formas de acción previstas.

- «Fuerzan» la situación tratando de aplicar algún modelo que involucre la función lineal que es lo que ellos conocen mejor.
- No tienen en cuenta el rango de las variables involucradas.
- Hacen su propio gráfico de acuerdo a lo obtenido en el punto a) a través de puntos y después ven cuál de los gráficos es el que más se parece a lo que ellos realizaron.
- Explican qué representaría cada gráfico sin relacionarlo con la parte a).

ii) ¿Cuáles son los posibles indicadores de la «evolución en el aprendizaje»?

- El descarte del gráfico que involucra funciones lineales.
- El poder pasar de un tipo de gráfico de situación (como el de los cuadrados) a una representación simbólica intermedia, explícita o no, para obtener información que luego vuelquen en un tipo de representación gráfica de tipo matemático-analítico (por ejemplo, interpretar en un gráfico matemático la simetría de los tamaños de los cuadrados a medida que varía la distancia a uno de los vértices).
- Mayor nivel de justificación.
- Coherencia con la resolución de la parte a).

5. *Corrección cruzada entre grupos*

i) ¿Qué hace el docente?

Supervisa que la corrección sea completa, esté explicada y lo suficientemente justificada.

ii) ¿Qué hace el observador?

- Detecta si hay un cambio de actitud en el grupo que pasó a tener el rol de «evaluador» (si son muy exigentes o no, con qué compromiso realizan la tarea que servirá para utilizar a otro grupo de compañeros, etc.).

- Detecta cómo juega la valoración de las personas en el momento de la corrección (puede ser que los integrantes de un grupo consideren que los integrantes del grupo asignado son flojos y entonces esta valoración sea suficiente para no intentar leer en detalle lo escrito por sus compañeros).

iii) Algunas acciones previstas

- Los alumnos discuten las respuestas de sus compañeros de acuerdo con lo resuelto por ellos y no con lo que sus compañeros escribieron.
- No saben cómo corregir.
- Dicen que están de acuerdo o no sin dar ninguna valoración de lo que están revisando.
- Evitan pronunciarse al respecto.

iv) ¿Cuáles son los posibles indicadores de la evolución en el aprendizaje?

- Mayor nivel de justificación de lo corregido.
- Cambio de opinión.
- Reconocimiento de aportes del modo de resolución del otro grupo.
- Uso de lenguaje y notación adecuados.

7. *Análisis de correcciones hechas por otro grupo*

i) ¿Qué hace el docente?

- Controla que todos los grupos reciban su devolución.
- Es mediador, en caso de ser necesario, entre los «correctores» y los «corregidos».
- Ayuda a los alumnos que reciben las correcciones para que las entiendan.

ii) ¿Qué hace el observador?

- Detecta si hay buena recepción de los trabajos corregidos por los compañeros.
- Registra los cambios de ideas y nociones a partir de esas correcciones.

Controla que todos los grupos reciban su devolución.

Es mediador, en caso de ser necesario, entre los «correctores» y los «corregidos».

Ayuda a los alumnos que reciben las correcciones para que las entiendan.

iii) Algunos resultados previstos

- Los alumnos no entienden las correcciones hechas.
- Se provocan discusiones por no querer aceptar correcciones por parte de sus compañeros y solicitan mayor fundamentación o bien dan una mejor explicación, como por ejemplo: «aquí nosotros quisimos escribir tal o cual cosa…».
- Reconocen los errores.

iv) Indicadores de evolución en el aprendizaje

- Reconocimiento de errores.
- Entendimiento de correcciones bien hechas.
- Mejor justificación de lo realizado.
- Análisis crítico de la propia producción.
- Reelaboración de la forma incorrecta en función de lo corregido.

Breve descripción de lo sucedido durante el desarrollo de la experiencia

Presentación del primer grupo

El primer grupo en donde se aplica la experiencia era muy heterogéneo, con mayoría de aspirantes a ingresar a la universidad entre los veinticinco a cuarenta años de edad, con experiencia escolar largamente interrumpida. Además, salvo pocas excepciones, en cuanto a habilidades y competencias matemáticas, la clase era de «alumnos flojos». El profesor solía en este curso explicar detalladamente y asistir a cada uno de los estudiantes, o a cada grupo que se formaba espontáneamente, corrigiendo los errores y explicando nuevamente, en forma personalizada y de otras maneras, en caso de notar que no hubo entendimiento. Frente a las distintas tareas asignadas en clase, los estudiantes tenían un tiempo acotado para pensar cómo la desarrollarían y para trazar una estrategia de desarrollo. Pasado este tiempo, el profesor, mediante una exposición dialogada y participativa con la clase completa, recopilaba lo hecho y desarrollaba el tema en forma teórico-práctica. Este curso contaba con poca experiencia de trabajo en pequeños grupos con una actividad especialmente diseñada para ello.

Descripción del desarrollo de la secuencia

En el momento de la experiencia, el profesor les presentó la modalidad de trabajo y frente a la consigna del cuadro 1, los estudiantes se agruparon respetando la disposición en la que estaban ubicados, que responde a afinidades personales. Se organizaron seis grupos con una cantidad de integrantes de entre 3 a 5 personas. En todos ellos hubo inicialmente una lectura silenciosa e individual del ejercicio propuesto. En algunos grupos, en los cuales no hubo un intento conjunto de entender el enunciado, llamaron directamente al profesor quien les explicó y dio pautas de acción. Surgió como obstáculo no previsto la dificultad por entender qué significa estar «inscrito». En general, salvo en uno de los grupos, se planteó un trabajo colaborativo, es decir todos abordaron la misma tarea; en el restante, en cambio, decidieron trabajar individualmente para comparar después. En todos estos grupos, salvo uno, la figura del líder no apareció claramente; sí es notorio que en todos ellos uno o dos integrantes tomaron la responsabilidad de hacer los cálculos, los dibujos del análisis, mientras el resto pensaba, obtenía conclusiones, dilucidaba y anticipaba sobre lo producido por esa persona y registraba en sus cuadernos cuando creía estar seguro de que se habían realizado bien las cosas. En el grupo restante, formado por cinco personas, una mujer parecía tener la voz cantante pero en realidad esbozaba ideas en voz alta para que otro compañero, más tímido pero más «matemático», le corrigiera y así juntos iban diseñando una estrategia de acción mientras el resto esperaba el acuerdo entre estos dos para comenzar a actuar. En algunas ocasiones el profesor, que supervisaba los grupos, intervino ayudando y contestando más de lo que el grupo solicitaba o haciendo notar que el camino tomado no era el correcto.

Respecto a poner en juego conocimientos ya adquiridos, en todos los grupos se comenzó a concebir la variabilidad de la magnitud *d*. Es notorio lo sucedido en dos de los grupos en donde establecieron una hipótesis anticipatoria, o presupuesto, que pretendían corroborar con sus cálculos. En uno de ellos, bajo una visión analítica, se aprestaron a dar valores a la distancia *d* presuponiendo de antemano que para diferentes valores obtendrían el mismo lado del cuadrado menor y, por lo tanto, el área sería constante. En el otro, bajo una visión geométrica, supusieron que el cuadrado inscrito es el rotado de uno fijo (algunos dijeron que era el rotado del cuadrado mayor) y concluían directamente que el área era constante. Para estos grupos fue costoso reconocer el tipo de dependencia entre las variables. El resto de los grupos reconoció rápidamente que había crecimiento y decrecimiento de los valores del área de acuerdo a la posición del inscrito y la *simetría* fue identificada porque «se vuelven a alcanzar los mismos valores del área una vez que el vértice del cuadrado inscrito se corrió de la mitad del cuadrado original». Enseguida pasaron a los gráficos de la parte b) del ejercicio e indicaron que los que podían corresponder estaban entre los gráficos 1, 4, 7 y 8.

Al finalizar el tiempo asignado, todos los integrantes de los grupos manifestaban los siguientes indicadores de aprendizajes *umbrales*: concibieron la variabilidad de las magnitudes, la dependencia entre ellas; concibieron un tipo de comportamiento combinado en cuanto al crecimiento; descubrieron que en un cierto rango de variabilidad de *d*

Al finalizar el tiempo asignado, todos los integrantes de los grupos manifestaban los siguientes indicadores de aprendizajes umbrales: concibieron la variabilidad de las magnitudes, la dependencia entre ellas; concibieron un tipo de comportamiento combinado en cuanto al crecimiento…

los valores del área crecen o decrecen. Sin embargo, no todos fueron capaces de establecer el tipo de dependencia entre las variables ni de exponer justificadamente lo realizado. De los seis grupos, destacamos sólo dos cuyos indicadores de aprendizaje fueron más elevados por cuanto justificaron mejor y establecieron claramente las diferencias con el modelo lineal conocido. Cabe destacar que sólo uno de esos dos grupos realizó la modelización usando el teorema de Pitágoras.

La exposición de los grupos se realizó en forma ordenada. Durante la misma los demás estudiantes permanecían callados sin manifestar si entendían o no lo que los compañeros estaban explicando. El profesor debería haber fomentado mayor intercambio en ese momento. Después de la exposición de cada grupo, la clase identificó como forma más adecuada aquélla donde se usó el teorema de Pitágoras para modelizar la variabilidad; sin embargo, no pudieron inferir un comportamiento global de la dependencia a través de esta fórmula, ya que al realizar la parte b) del ejercicio, cometieron errores. En principio no hubo inconvenientes en descartar aquellos gráficos que no mostraban simetría, sin embargo, en su mayoría, no supieron descartar los modelos que involucraban la función lineal y los pocos que lo hicieron no lo hicieron justificadamente.

En cuanto a la dinámica grupal de las instancias siguientes, hubo más inconvenientes en los momentos de realizar la corrección y de recibir la corrección. Es decir, que hubo dificultades en presentar un *producto grupal* (la exposición y defensa de lo realizado por el equipo a la clase, la presentación de una selección justificada de gráficos para ser corregido, la corrección de la producción de otro grupo). Cabe aclarar que era la primera vez en la que se les solicitaba y evaluaba una producción grupal. Consideramos que, según los indicadores formulados, en el punto 7 no hubo el aprendizaje esperado pues las correcciones realizadas por los grupos no eran claras ni justificadas.

Presentación del segundo grupo

Este curso contaba, en el momento de observar la experiencia, con práctica en el desarrollo de actividades grupales. En estas actividades, los estudiantes trataban de resolver la tarea propuesta en grupos mientras el profesor asistía y guiaba la tarea de cada grupo. Luego, mediante una exposición dialogada y participativa con la clase completa, desarrollaba una puesta en común, con los distintos razonamientos proporcionados por los diferentes grupos. En el momento de la experiencia, el profesor les presentó la modalidad de trabajo y frente a la consigna del cuadro 1, los estudiantes se agruparon respetando la disposición en la que estaban ubicados que respondía a afinidades personales. Se formaron así 14 grupos con entre 5 a 8 integrantes.

En este caso, contamos con una observación localizada, de un equipo en particular que fue elegido al azar. El mismo contaba con 7 integrantes. Tres de los cuales tenían entre 19 y 25 años aproximadamente, los otros cuatro entre 25 y 55 años aproximadamente. En un principio, cada integrante leyó silenciosa e individualmente el ejercicio propuesto. Algunos escribieron solos en sus cuadernos, otros se quedaron observando lo que hacía el compañero; nadie pedía explicación. Cabe destacar que en este grupo tres participantes pensaban seguir la mención de administración y, casualmente, estaban sentados alineados los tres juntos. Ellos fueron los primeros del grupo en obtener alguna conclusión En un principio se comunicaban entre sí, sin compartir sus razonamientos a los demás. El resto de los integrantes trabajaba solo o no trabajaba. Al poco tiempo, uno de los participantes que no trabajaba, se anima a preguntarle al resto, sobre el enunciado del problema, aduciendo no entender el enunciado «No entiendo… ¿qué hay que hacer?». Ahí, el subgrupo de tres personas que se había formado, trata de explicarle, con sus palabras lo que habían entendido. Destacamos como dificultad no prevista, el entendimiento del enunciado del problema propuesto. También surgió aquí como obstáculo la dificultad por entender qué significa estar «inscrito», y la movilidad de la figura de análisis a través de la variabilidad de *d*. Una vez que ellos lograban con sus palabras comunicarse y entenderse, avanzaban en cuanto al análisis del problema. En este grupo, enseguida se manifestó este subgrupo de tres personas que llevaban la «voz cantante», estos integrantes si bien comunicaban sus conclusiones al resto, sólo integraban al resto de los participantes en el caso de que alguno de ellos lo requiriera expresamente pidiendo ayuda.

Así, fueron obteniendo conclusiones como la variabilidad de las magnitudes, la dependencia entre ellas; concibieron un tipo de comportamiento combinado en cuanto al crecimiento, descubrieron que en un cierto rango de variabilidad de *d* los valores del área crecen o decrecen, se dieron cuenta de la simetría del problema. Esto lo consiguieron proponiendo distintos valores de *d*.

Los integrantes de este grupo manifestaban los siguientes indicadores de aprendizajes *umbrales:* concibieron la variabilidad de las magnitudes, la dependencia entre ellas; concibieron un tipo de comportamiento combinado en cuanto al crecimiento, descubrieron que en un cierto rango de variabilidad de *d* los valores del área crecen o decrecen. Sin embargo, no fueron capaces de establecer el tipo de dependencia entre las variables ni exponer justificadamente lo realizado. De los catorce grupos, destacamos sólo uno cuyos indicadores de aprendizaje fueron más elevados por cuanto justificaron mejor y establecieron claramente las diferencias con el modelo lineal conocido. Cabe destacar que sólo éste realizó la modelización usando el teorema de Pitágoras.

La exposición de los grupos se realizó en forma medianamente ordenada. Durante la misma, algunos estudiantes hacían comentarios entre ellos de las resoluciones que aparecían en la pizarra, otros permanecían callados sin manifestar si entendían o no lo que los compañeros estaban explicando.

Aunque muchas de las conclusiones explicitadas eran carentes de formalización en lenguaje matemático, hubo buen intercambio en esta instancia. En esta clase, mientras algunos grupos exponían, hubo intervención del resto para entender la exposición.

Después de la exposición de cada grupo, la clase identificó como forma más adecuada aquélla donde se usó el teorema de Pitágoras para modelizar la variabilidad. Todos los grupos prestaron especial atención a la construcción de la fórmula, anotaban en sus cuadernos y se explicaban entre ellos.

Al realizar la parte b) del ejercicio indicaron que los que podían corresponder estaban entre los gráficos 1, 4, 7 y 8. En principio no hubo inconvenientes en descartar aquellos gráficos que no mostraban simetría, sin embargo, les costó descartar los modelos que involucraban la función lineal y aquéllos que lo descartaron no lo hicieron justificadamente.

En este curso, debido a la cantidad de alumnos, no se pudo avanzar más en el desarrollo de la propuesta.

De los catorce grupos, destacamos sólo uno cuyos indicadores de aprendizaje fueron más elevados por cuanto justificaron mejor y establecieron claramente las diferencias con el modelo lineal conocido. Cabe destacar que sólo éste realizó la modelización usando el teorema de Pitágoras.

Conclusiones

Las interacciones pueden servir para relacionar los significados nuevos con los que ya se tienen para ir, de este modo, construyendo un concepto matemático. El conocimiento matemático responde a ciertas reglas rigurosas de estructuración; en la sociabilización de este tipo de conocimiento mediante las interacciones se exige hacer explícitas esas reglas en forma clara para que pueda haber comunicación y, por lo tanto, no pueda eludirse el conocimiento de las mismas.

En el seno del grupo las interacciones son espontáneas, la comunicación se realiza a través de un lenguaje más informal y los integrantes parecen entenderse mediante expresiones poco precisas. En cambio, cuando deben presentar una producción grupal y responder por ella (momentos 5, 6 y 7) les resulta más complicado, pues la negociación de significados (Godino y Llinares, 2000) se produce a un nivel superior, de ahí la dificultad con la que se encontraron los alumnos y que no pudieron superar.

Esta experiencia nos alerta, además, sobre la importancia de dar lugar a diversos tipos de interacciones y aprendizajes sociales para llegar a una forma acabada de aprendizaje matemático. Si en lugar de realizar las indicaciones 3, 4, 5, 6 y 7 del recuadro 1 para realizar la parte b) del ejercicio propuesto, hubiese sido simplemente «indicar con una cruz el o los gráficos que pueden corresponder a la representación del área del cuadrado» las observaciones muestran que es altamente probable que muchos grupos habrían respondido correctamente con una cruz debajo de la figura 7. Sin embargo, aun cuando la respuesta hubiera sido correcta, y pudiera considerarse que entonces hubo entendimiento y algún aprendizaje, de esta forma no habrían surgido las contradicciones en los significados y errores matemáticos que conviven en los estudiantes como las que mostramos en los documentos del anexo.

En relación a esto hemos visto que esta experiencia logró «complejizar» un contenido matemático desde una perspectiva personal y social para enriquecerlo y llegar a él de una forma más consciente y, por lo tanto, más reflexiva revalorizando los recursos de validación.

Bibliografía

ALMEIDA, M., A. ARAGÓN, M. FALSETTI, A. FORMICA, L. KULESZ, M. MARTÍNEZ y M. RODRÍGUEZ (2001): *Guía de Matemática para el Curso de Aprestamiento Universitario. Módulo I: Álgebra y Geometría*, Serie Material Didáctico 6.1, UNGS.

DOUADY, R. (1995): «La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento», en *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica, 61-97.

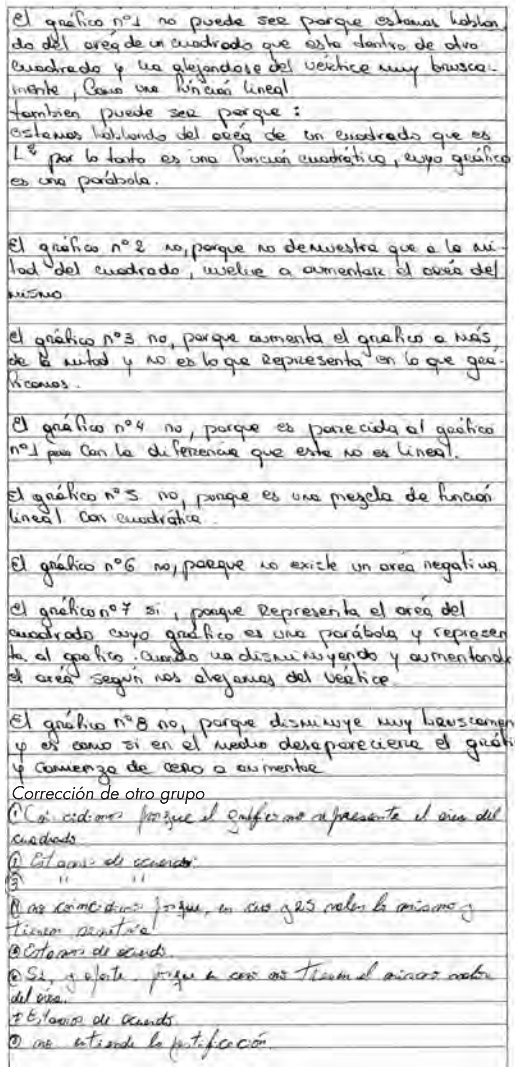
FALSETTI, M., A. FIGLIOLA, L. KULESZ y M. RODRÍGUEZ (2001): *Guía de Matemática para el Curso de Aprestamiento Universitario. Módulo II: Modelización,* Serie Material Didáctico 6.2, UNGS.

GODINO, J. y S. LLINARES (2000): «El interaccionismo simbólico en Educación Matemática», *Educación Matemática,* vol. 12(1), n.° 12(1), 70-92.

SHULMAN, J., R. LOTAN y J. WHITCOMB (comp.) (1999): *El trabajo en grupo y la diversidad en el aula,* Amorrortu, Buenos Aires.

Marcela C. Falsetti
Mabel A. Rodríguez
Adriana J. Aragón
Instituto del Desarrollo Humano.
Universidad Nacional de General Sarmiento.
Área de Matemática.
Los Polvorines (Argentina)

Anexo



el gráfico n°1 no puede ser porque estamos hablando del área de un cuadrado que esta dentro de otro cuadrado y va alejandose del vértice muy bruscamente, como una función lineal

tambien puede ser porque:
estamos hablando del área de un cuadrado que es L^2 por lo tanto es una función cuadrática, cuyo gráfico es una parábola.

El gráfico n° 2 no, porque no demuestra que a la mitad del cuadrado, vuelve a aumentar el área del mismo

el gráfico n°3 no, porque aumenta el grafico a más de la mitad y no es lo que representa en lo que graficamos.

el gráfico n°4 no, porque es parecida al gráfico n°1 pero con la diferencia que este no es lineal.

El gráfico n°5 no, porque es una mezcla de función lineal con cuadrática.

El gráfico n°6 no, porque no existe un area negativa

el gráfico n°7 si, porque representa el área del cuadrado cuyo gráfico es una parábola y representa al gráfico. Cuando va disminuyendo y aumentando el área según nos alejamos del vértice

El gráfico n°8 no, porque disminuye muy bruscamente y es como si en el medio desapareciera el gráfico y comienza de cero a aumentar

Corrección de otro grupo

(1) Coincidimos porque el gráfico no representa el área del cuadrado
(2) Estamos de acuerdo.
(3) " "
(4) no coincidimos porque, en caso 9,25 valen lo mismo y tienen [illegible]
(5) Estamos de acuerdo.
(6) Si, y aparte porque [illegible] no tienen el mismo valor del área.
(7) Estamos de acuerdo.
(8) no entiendo la justificación.

SUMA 41

noviembre 2002, pp. 69-79

El juego del caos en la calculadora gráfica: construcción de fractales

Juan C. Moreno-Marín

IDEAS Y RECURSOS

Este artículo aporta un modelo de actividad matemática en el contexto constructivista. Se proponen unos ejercicios atractivos sobre la generación de fractales lineales con el juego del caos. Se ha elegido este tema por su utilidad en la didáctica de la geometría en la ESO, favoreciendo un aprendizaje efectivo de las transformaciones de similaridad.

El juego del caos produce una secuencia aleatoria de puntos que eventualmente condensan en el atractor de un fractal lineal. A partir del listado del juego que genera el triángulo de Sierpinski, se puede modificar la descripción analítica de las transformaciones y obtener el atractor de numerosos fractales, como resultado del juego, en la pantalla de la calculadora. Esto no sólo es divertido, sino que es una forma interesante de estudiar las transformaciones lineales en el plano, uno de los objetivos de las matemáticas en secundaria.

LA IDEA de fractal, concebida por B. B. Mandelbrot (1977), es el punto de partida para el desarrollo de toda la geometría fractal en el último cuarto del siglo XX, y representa un concepto revolucionario que ha permitido importantes progresos en el estudio de objetos y fenómenos irregulares. Sus aplicaciones en el aula, para la enseñanza de la geometría, son muy interesantes (Fernández y Pacheco, 1991), permitiendo la exploración e investigación con reglas y estructuras matemáticas muy sencillas pero con resultados de complejidad y belleza extraordinarias.

Con la introducción de los fractales como objeto de estudio, se puede trabajar de acuerdo con numerosos objetivos de la competencia matemática propios de la secundaria. Se manejan conceptos habituales de los currículos matemáticos como la iteración, las transformaciones geométricas lineales y las no-lineales, la semejanza y la homotecia, la convergencia y el límite, o el determinismo y el azar, permitiendo mostrar interesantes interconexiones entre diferentes ideas matemáticas.

En este artículo, se presenta una propuesta didáctica distinta al trabajo tradicional en geometría durante la etapa secundaria. Se refiere a actividades de tipo investigativo, sugeridas en las *pequeñas investigaciones* de las orientaciones didácticas oficiales. Plantea una recreación sobre *el juego del caos,* compuesta por la experimentación y estudio de diferentes transformaciones geométricas lineales. Esta actividad incide en algunas de las líneas de investigación en la didáctica de las matemáticas que, desde hace tiempo, se consideran como prioritarias en el contexto de la enseñanza secundaria, como geometría, creatividad, diseño de materiales para la enseñanza y algoritmos (Caballer, Carrascosa y Puig, 1986). Para seleccionar el tema de la actividad y la metodología, se han utilizado criterios de innovación, interés y actualización.

Objetivos y metodología

Este trabajo consiste en el diseño y elaboración de una actividad que permita al alumno ampliar sus conocimientos sobre las transformaciones lineales, desarrollando destrezas y aplicando recursos personales en la resolución de los ejercicios. De esta manera, se proporciona a los profesores un ejemplo de ejercicios para fomentar una enseñanza de la geometría más creativa, favoreciendo el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas y la investigación en el aula.

La programación del currículo oficial de matemáticas para la ESO supone considerar diferentes contenidos referidos a conceptos, procedimientos y actitudes, y un amplio rango de metodologías, enmarcadas dentro del enfoque constructivista sobre el aprendizaje y el cambio conceptual.

Los contenidos de geometría en esta etapa, centrados claramente en la geometría analítica, podrían basarse en una didáctica de la geometría fundamentada en los grupos de transformaciones, que, partiendo de juegos y ejercicios con transformaciones topológicas, afines y proyectivas, continúe con la construcción geométrica de modo natural de esos contenidos (Dienes y Golding, 1972). En este contexto, el objetivo específico de estas actividades instructivas es que los estudiantes puedan adquirir un dominio suficiente de las transformaciones geométricas lineales, de forma que las puedan utilizar y modificar a medida que se enfrentan con nuevos ejercicios.

Para este fin se ha propuesto la generación de fractales lineales con el juego del caos. Su elección se debe a que, partiendo de este tema considerado como centro de interés, se pueden desarrollar de una manera distinta diversos aspectos de la geometría y la probabilidad, que forman parte de la programación de matemáticas en ESO (Sánchez, 1997). Estas actividades entroncan contenidos de la etapa de las operaciones concretas, con los de la geometría analítica en la etapa de las relaciones formales, propios de la secundaria.

Distinguir elementos de figuras planas, hallar relaciones de simetría, incidencia o perpendicularidad; reconocer figuras congruentes, semejantes o equivalentes según un criterio dado; o definir conceptos y enunciar propiedades geométricas, son algunos de los objetivos, referentes a los conceptos, del estudio de la geometría durante la etapa 12-16 años (Alsina, Burgués y Fortuny, 1987), en los que incide esta actividad.

Realizar observaciones sistemáticas, clasificarlas, y expresarlas en diferentes lenguajes; usar las transformaciones geométricas, isometrías y semejanzas; resolver problemas por el método analítico y el método gráfico; o interpretar representaciones y deducir relaciones geométricas de las mismas, son algunos de los objetivos procedimentales.

Mientras que, valorar positivamente las actividades destinadas a resolver cuestiones o descubrir hechos; valorar el uso correcto del vocabulario estudiado; y reconocer la necesidad de utilizar todas las técnicas e instrumentos de cálculo y representación gráfica a su alcance para abordar situaciones problemáticas, son objetivos actitudinales que se persiguen con el trabajo propuesto.

Las posibilidades de los estudiantes de manejar mentalmente las transformaciones geométricas y sus propiedades, son prácticamente ilimitadas, igual que los grados de dificultad con los que pueden plantearse problemas y actividades.

El planteamiento de situaciones problemáticas concretas, puede establecer las conexiones entre los conceptos, los procedimientos y las actitudes que destacarían la funcionalidad de los conocimientos, fomentando las interacciones entre las matemáticas y el alumno dentro del contexto social y de desarrollo tecnológico en el que se desenvuelve.

Las actividades que se presentan pretenden la utilización del juego del caos para modificarlo y adaptarlo a diferentes transformaciones geométricas. Las posibilidades de los estudiantes de manejar mentalmente las transformaciones geométricas y sus propiedades, son prácticamente ilimitadas, igual que los grados de dificultad con los que pueden plantearse problemas y actividades (Núñez, 1985). El principal objetivo no debe ser únicamente la resolución de estos ejercicios, sino capacitar al estudiante para la utilización del juego hacia el estudio de nuevas situaciones, relacionarlas entre sí e interpretarlas como parte de un todo más amplio. De esta manera se convierte en una actividad matemática creativa, permitiendo producir resultados nuevos a partir de variaciones de los conocidos y sintetizar los diferentes aspectos del conocimiento matemático desarrollado para configurar una cierta visión global del mismo.

Una de las implicaciones didácticas que se persiguen con esta experiencia es el fomento en los estudiantes de la utilización, durante el proceso de resolución de estos ejercicios, de todos sus conocimientos y procedimientos involucrados en cada caso. Estos aspectos cognitivos constituyen, según Callejo (1994), el conjunto de conocimientos que están disponibles en la memoria del sujeto para ser utilizados: hechos, definiciones, algoritmos…, cuya integración no se consigue mediante la transmisión de conceptos y posterior resolución reiterativa de ejercicios de aplicación, sino realizando actividades de enseñanza-aprendizaje relacionadas con contextos concretos, que muestren a los estudiantes la necesidad de asimilar los conceptos matemáticos que intervienen.

En resumen, con esta metodología se plantea la necesidad de que tanto el profesor como el estudiante adopten un papel coherente con el enfoque constructivista, encaminando las actividades a conseguir que los estudiantes utilicen todos sus conocimientos sobre el tema, contrasten sus propuestas y resultados con sus compañeros, y apliquen estos resultados a otras situaciones. La manera de construir los aprendizajes, consiste en realizar los ejercicios propuestos, dando respuesta a las actividades planteadas, aprendiendo a trabajar de forma autónoma, siendo capaz de tomar iniciativas y de acoplarse al trabajo del resto del grupo.

Otra cuestión a tener en cuenta es que la resolución de ejercicios puede contemplarse como una actividad de apoyo y consolidación para el aprendizaje de los contenidos conceptuales. Como afirman Boch y Gascón (1994), este tipo de propuestas se tienden a considerar peyorativamente, como trabajo considerado como meramente mecánico y repetitivo, sólo porque pueda parecer rutinario y no creativo. Lo que se propone es aparentemente un tipo de trabajo matemático insignificante y humilde, aunque necesario para el desarrollo creativo de la actividad matemática en general y del proceso didáctico en particular.

También se pretende el objetivo de superar la dificultad que tienen los estudiantes para diferenciar los aspectos deterministas de lo aleatorio, revisando las nociones fundamentales sobre el conocimiento probabilístico y, entre ellas, sobre la aleatoriedad. La capacidad de reconocimiento y tratamiento de los sucesos aleatorios depende del nivel de reconocimiento de la incertidumbre, de la comprensión de la noción de azar, fundamental a la hora del tratamiento de la probabilidad en el aula y en nuestro juego. Desde la educación primaria, se recogen en el currículo de matemáticas los conceptos fundamentales del conocimiento probabilístico: reconocimiento de los fenómenos y sucesos aleatorios, y cuantificación de la probabilidad de sucesos sencillos.

…con esta metodología se plantea la necesidad de que tanto el profesor como el estudiante adopten un papel coherente con el enfoque constructivista, encaminando las actividades a conseguir que los estudiantes utilicen todos sus conocimientos sobre el tema, contrasten sus propuestas y resultados con sus compañeros, y apliquen estos resultados a otras situaciones.

Conforme se llevan a cabo las actividades en la práctica, se pone en marcha la fase de evaluación del proceso educativo. La evaluación en geometría nos debe indicar qué comportamientos de percepción espacial, y de comprensión de conceptos y relaciones geométricas han sido adquiridos (Alsina, Burgués y Fortuny, 1987).

Para conocer el proceso de aprendizaje, se propone una técnica de evaluación compuesta básicamente por dos fases. Una fase basada en la observación directa de la realización de los distintos ejercicios y exploraciones. Esta observación se puede realizar de forma subjetiva *in situ*, en el momento de la realización de las actividades, y de forma más objetiva controlando y revisando los registros escritos en el cuaderno de matemáticas.

La otra fase de evaluación es la de observación indirecta, quizá la más productiva, en la que se analiza la respuesta gráfica en la calculadora y escrita en el listado de los programas que el estudiante da al aplicar los conceptos utilizados en cada nueva situación. La observación indirecta nos permitirá evaluar si el aprendizaje ha sido significativo. En esta fase, las preguntas que se planteen no sólo son importantes para la evaluación, sino para todo el proceso educativo.

La representación gráfica es un lenguaje muy importante para construir y expresar los conocimientos geométricos. Cada vez hay más herramientas inteligentes disponibles para la generación y representación gráfica de fractales, tales como calculadoras gráficas, hojas de cálculo o programas gráficos. Además de la capacitación para generalizar el uso de las herramientas, un problema clave del aprendizaje es que los estudiantes sean más capaces de discernir e identificar las situaciones en las cuales una herramienta resulta aplicable. Mediante el juego del caos se ha convertido el estudio de las transformaciones lineales a una forma que facilita el uso de una de esas herramientas.

La integración de la calculadora gráfica como soporte para el trabajo didáctico en clase, y utilizada como canal transmisor de contenidos matemáticos, proporciona a los estudiantes el entorno adecuado para esta actividad de investigación geométrica. Al optar por la calculadora, se fomentan actividades exploratorias con las que pueden contrastar rápidamente sus intuiciones. El trabajo individual, que favorece el manejo de esta herramienta, se equilibra con la cooperación entre ellos, necesaria para el aprendizaje de su uso y para resolver todos los errores que la edición y modificación de los programas conlleva.

La calculadora tiene la desventaja de la pobre resolución gráfica de su pantalla, fundamental para representar los resultados geométricos del juego, que con seguridad mejorará rápidamente en futuros modelos. A cambio, su capacidad de cálculo y de programación son suficientes para este propósito y, sobre todo, se ha convertido en la herramienta de cálculo más accesible. Muy por delante de los ordenadores, en la actualidad las calculadoras gráficas están disponibles en las aulas de secundaria, bien aportadas por los centros de enseñanza, o personalmente por los estudiantes.

Los fractales lineales

Los elementos de la geometría fractal se describen mediante reglas de cálculo y algoritmos que, con la ayuda de una herramienta de cálculo y representación como la calculadora gráfica, se convierten en formas y estructuras. Los fractales, que aparentan tener una gran complejidad, poseen una misma regularidad geométrica, la autosimilaridad o invarianza bajo escala. Si se analizan estas estructuras a distintas escalas, se encuentran una y otra vez los mismos elementos básicos. Su interrelación a distintas escalas, se describe matemáticamente con el concepto de dimensión fractal (Jürgens, Peitgen y Saupe, 1990).

Los fractales lineales forman un grupo fundamental de esta geometría. Cada fractal lineal queda totalmente definido por un conjunto de transformaciones lineales afines en el plano. Para constituir un algoritmo fractal lineal deben ser además transformaciones contractivas, es decir, que la distancia entre dos puntos cualesquiera disminuya cuando se aplica la transformación. En todas las transformaciones lineales afines, las rectas paralelas se transforman en rectas paralelas, así como los puntos medios en puntos medios, y las razones entre distancias a lo largo de las mismas rectas, o a lo largo de paralelas, se transforman en las mismas razones (Dienes y Golding, 1972).

El fractal es la figura límite resultante de una sucesión infinita de repeticiones de las transformaciones sobre una figura original. El comportamiento límite garantiza que, con independencia de la figura original, cada algoritmo fractal da lugar a una figura límite, y sólo una.

Los fractales lineales son estrictamente similares a sí mismos, es decir, un pequeño fragmento cualquiera de ellos contiene una figura que, con la ampliación adecuada, es idéntica al objeto completo. La singularidad de un fractal lineal, como objeto geométrico autosimilar, es fácilmente reconocida por los estudiantes si se revisan algunos ejemplos.

Esta experiencia, que permite desarrollar parte de los contenidos de la geometría analítica del plano en las matemáticas de la etapa secundaria obligatoria, se orienta hacia las transformaciones de similaridad, que son composiciones de escalado o contracción, traslación y rotación, a las que se les puede añadir la reflexión. Además de éstas, también puede haber transformaciones con diferentes factores de reducción en distintas direcciones. Una transformación de similaridad conserva los ángulos, mientras que contracciones más generales, no.

El objeto de esta actividad didáctica, consiste en la descripción y formulación analítica de transformaciones geométricas sencillas en el plano para obtener imágenes fractales. Se utiliza la calculadora gráfica programable como soporte para el cálculo y la representación gráfica de una larga sucesión de transformaciones. Además, la aplicación de un procedimiento aleatorio para obtener fractales lineales, puede parecer una paradoja que deberá ser analizada.

El algoritmo conocido como juego del caos es un método muy sencillo y eficaz para la generación de figuras fractales, consistente en realizar una sucesión de transformaciones sobre un solo punto.

El juego del caos

El algoritmo conocido como *juego del caos* es un método muy sencillo y eficaz para la generación de figuras fractales, consistente en realizar una sucesión de transformaciones sobre un solo punto. Comenzando con un punto cualquiera en el plano, se le aplica una de las transformaciones que definen el fractal, elegida aleatoriamente, y se obtiene un nuevo punto. Se le vuelve a aplicar otra transformación elegida al azar al nuevo punto, y así sucesivamente, obteniéndose un conjunto de puntos como consecuencia de la sucesión aleatoria de transformaciones. El conjunto así construido llena densamente la figura límite sin depender de la sucesión concreta de transformaciones elegidas.

Ésta es la característica más interesante del juego del caos: cuando el proceso aleatorio se repite un gran número de veces, el conjunto de puntos resultante se aproxima a una figura conocida y claramente determinista. Parece sorprendente que un juego aleatorio como éste, dé lugar a modelos tan estructurados como los fractales, ilustrando las potentes conexiones que subyacen en las matemáticas.

No se trata de un caso de caos determinista como sugiere Gallardo (1995), sino simplemente de un procedimiento aleatorio sobre un conjunto limitado de transformaciones, que tras un número elevado de iteraciones produce todas las secuencias posibles de las mismas, o al menos muchas, y por lo tanto el punto móvil visita todas, o casi todas, las pequeñas copias que constituyen la figura completa.

Otra de las características del juego del caos, es que presenta el fractal tal y como es, sin depender del número de iteraciones. Así, la figura mantiene un nivel infinito de detalle y autosemejanza a cualquier escala, aunque para escalas muy pequeñas sea necesario generar una gran cantidad de puntos, hasta que su densidad sea suficiente para observar la figura. Como el primer punto se ha elegido al azar sobre el plano, el juego debe encaminarse primero hacia la figura límite, por lo que los puntos obtenidos en las primeras tiradas se deben eliminar sin representar.

El resultado del juego tampoco depende del dado utilizado, es decir, no está condicionado por las probabilidades con las que cada transformación contractora entre a formar parte del juego. Este aspecto probabilístico del juego conecta con su eficacia en la convergencia, con la rapidez en la obtención de la figura límite. El fractal se obtiene más rápidamente si no se eligen las transformaciones al azar con igual probabilidad, sino que la velocidad de formación de la figura aumenta sensiblemente cuando a las transformaciones más contractoras se les asigna una probabilidad mayor. De esta manera se puede conseguir que la sucesión de puntos en el juego, barra en promedio con la misma frecuencia cada uno de los puntos de la figura límite. La utilización de estas frecuencias permite formar figuras con diferentes tonos de gris, asignando probabilidades que den lugar a distintas frecuencias con que se marquen puntos en cada área. Aplicando con esta técnica los tres colores fundamentales pueden codificarse figuras en color.

El triángulo de Sierpinski (1915) es el ejemplo más sencillo que se puede utilizar para describir cómo se obtiene la imagen fractal en el juego. Las tres transformaciones lineales que lo definen, consisten en la reducción a la mitad de tamaño y el desplazamiento hacia uno de los vértices de un triángulo equilátero. Durante el juego, cada transformación se traduce en un desplazamiento del punto en el interior del triángulo. Para cada movimiento se utiliza un método aleatorio, por ejemplo lanzando un dado, para seleccionar una de las tres transformaciones, y consecuentemente uno de los vértices del triángulo, y el punto se desplaza hasta la mitad de la distancia al vértice correspondiente. Esta regla es reflejo de la geometría de Sierpinski, pues la figura consiste en tres copias autosimilares de mitad de tamaño cada una.

El triángulo de Sierpinski (1915) es el ejemplo más sencillo que se puede utilizar para describir cómo se obtiene la imagen fractal en el juego.

Si se representan las trayectorias que unen los puntos medios, aparece la secuencia del juego y se puede observar la aleatoriedad del proceso, el movimiento aparentemente caótico del punto móvil. Dibujando sólo los impredecibles puntos medios, en el triángulo emerge un modelo estructurado que, en el límite infinito, resulta ser el fractal de Sierpinski. Esta figura se puede generar por infinitos saltos aleatorios guiados por un dado, donde los puntos, eventualmente, condensan en un fractal determinista.

Mediante los sucesivos movimientos en el juego, aparecerán todas las secuencias posibles que localizan subtriángulos entre cuyos límites deberá caer el punto y, por lo tanto, el punto móvil alcanzará todos esos subtriángulos (Peitgen, Jürgen y Saupe, 1992). Cuanto más continúe el juego, mayor será el número de puntos que aparezcan representando esos subtriángulos. Jugando indefinidamente, aparecerá el triángulo fractal completo, mientras que, cuando paremos el juego después de un número finito de tiradas, el triángulo de Sierpinski aparecerá incompleto.

Fractales lineales en el juego del caos

El juego del caos permite la incorporación de diferentes transformaciones en el algoritmo, que, mediante su aplicación sobre puntos del plano, obtiene figuras fractales. La investigación en este tema se compone de una serie graduada de ejercicios que se presentan a los estudiantes. Para este trabajo la actividad será distribuida temporalmente en seis sesiones de una hora cada una, las cuales pueden ser ampliadas si surge su necesidad.

Hemos mencionado el triángulo equilátero de Sierpinski, pero cualquier otro fractal lineal puede ser reproducido igualmente con el juego del caos. Atendiendo a una de las cuestiones pendientes planteadas por Gallardo (1995), numerosos fractales matemáticos se obtienen por este procedimiento en la práctica totalidad de las aplicaciones informáticas que los calculan. En este caso, y para evitar dificultades añadidas, se ha decidido restringir su utilización sólo a los fractales lineales.

El trabajo matemático subyacente consiste en obtener la descripción analítica en términos de coordenadas cartesianas de todas las transformaciones estudiadas sobre los puntos del plano, que en la geometría afín resulta sencillo. A partir de un sistema de coordenadas cartesiano, se pueden hallar fórmulas matemáticas que permitan obtener la posición del punto transformado a partir del anterior. Para ello, cada transformación puede descomponerse en partes, expresándose como la que resultaría al aplicar sucesivamente varias transformaciones simples.

Metodológicamente, no resulta difícil que los estudiantes adquieran destreza en el uso del juego del caos en la calculadora si se introducen progresivamente, atendiendo a su dificultad, las diferentes transformaciones de similaridad; se ensaya y se experimenta con ellas hasta obtener su expresión analítica general y, posteriormente, se incorporan como modificaciones sobre el programa que obtiene el triángulo equilátero fractal. El listado de este programa suele aparecer como ejemplo de programación en el manual de muchas calculadoras. Se les proporciona ese programa ofreciéndoles el listado, que deben introducir en la calculadora, o mejor, pidiéndoles que se lo intercambien de máquina a máquina conectándolas entre sí.

La resolución de los ejercicios requiere la representación gráfica del resultado del juego: la primera vez como comprobación del resultado y, posteriormente, como experimentación de nuevas variantes.

Descripción de los ejercicios que componen esta actividad

¿Qué ocurre si se cambian las transformaciones, si se cambia el número de copias, o sus propiedades de contracción (escalado, rotación…), o la configuración en la que se agrupan las imágenes contraídas? La respuesta a esta pregunta es la tarea que se plantea.

Ejercicio 1

La primera puesta en marcha del juego se propone manual, para aplicar las tres transformaciones que generan el triángulo de Sierpinski. Los estudiantes deberán jugar, inicialmente, en una hoja de papel que contenga los tres vértices del triángulo equilátero. Las tiradas de un dado permiten elegir al azar cada transformación.

Para ejecutar las jugadas se les proporciona una *regla del punto medio*. Se trata de una pequeña regla graduada con una escala simétrica respecto a su centro, que resulta muy útil para realizar los desplazamientos al punto medio entre la posición del punto y el vértice correspondiente.

Se pueden obtener resultados conjuntos de un gran número de tiradas si los estudiantes utilizan hojas transparentes al dibujar los puntos que aparecen en el juego, para, después, superponerlas y proyectar el resultado combinado sobre una pantalla. Aparecerá el agrupamiento esperado, pero sólo a partir de un número suficiente de jugadas. La formación de la figura fractal es la situación adecuada para discutir e interpretar cómo se produce este resultado, cómo los puntos acaban llenando densamente la figura límite.

Metodológicamente, no resulta difícil que los estudiantes adquieran destreza en el uso del juego del caos en la calculadora si se introducen progresivamente, atendiendo a su dificultad, las diferentes transformaciones de similaridad…

Las primeras preguntas que se pueden plantear como estas:

- ¿Hay límites y cuáles son para todos los posibles puntos en este juego?
- ¿Aparecerán localizados aleatoriamente los sucesivos puntos medios dentro de esos límites?
- ¿Cubren los puntos completamente la región triangular?
- ¿Parece predecible el resultado que aparece con los puntos que emergen del movimiento aleatorio de puntos en el juego del caos?

No cabe duda de que el lugar posible para el movimiento de los puntos será el interior del triángulo, y que aparecerá rápidamente una aproximación al triángulo de Sierpinski. La localización de una secuencia de puntos dibujados depende básicamente del resultado aleatorio del dado; cuando se comparen diferentes hojas del juego variarán considerablemente unas de otras. Aunque cada resultado es diferente, rápidamente se comprueba que un gran número de jugadas nos generan el resultado fractal. Comprobar que diferentes puntos de partida no dan lugar a diferencias en los resultados, es una de las observaciones que hay que realizar.

Ejercicio 2

Como resulta tedioso continuar utilizando lápiz y papel para realizar un gran número de tiradas, a partir de aquí se propone utilizar una herramienta a nuestro alcance para reproducir el juego del caos: la calculadora gráfica. Es necesario ser cuidadoso introduciendo y modificando los listados de programas en la calculadora para simular el juego.

La tarea principal es la de revisar el listado del programa del juego del caos (figura 1), interpretando sus diferentes

Program Hexagon

```
FnOff :ClrDraw
PlotsOff
AxesOff
0→Xmin:1→Xmax
0→Ymin:1→Ymax
rand→X:rand→Y
For(K,1,3000)
rand→N
If 1/6>N
Then
(X+(2*.25))/3→X:(Y+(2*.067))/3→Y
End
If 1/6<N and N≤1/3
Then
X/3→X
(Y+(2*.5))/3→Y
End
If 1/3<N and N≤1/2
Then
(X+(2*.25))/3→X:(Y+(2*.9330))/3→Y
End
If 1/2<N and N≤2/3
Then
(X+(2*.75))/3→X:(Y+(2*.9330))/3→Y
End
If 2/3<N and N≤5/6
Then
(X+(2*1.))/3→X
(Y+(2*.5))/3→Y
End
If 5/6<N
Then
(X+(2*.75))/3→X:(Y+(2*.067))/3→Y
End
Pt-On(X,Y)
End
StorePic 6
```

Figura 1. Listado del programa del juego del caos en la calculadora gráfica TI-83 para obtener el hexágono de Sierpinski. El resultado del juego se muestra en la figura 7

partes y todas las instrucciones. La calculadora utiliza un lenguaje de programación sencillo, similar al Basic.

Se procede a analizar y describir la estructura del algoritmo de cálculo que estructura el juego. Sin hacer hincapié en los detalles de programación, lo fundamental aquí es la comprensión de la simulación con la máquina. Continúa el trabajo con la introducción de manera cuidadosa en la calculadora del listado del juego del caos para el triángulo de Sierpinski, y con su ejecución.

La calculadora utiliza un lenguaje de programación sencillo, similar al Basic.

Antes de proponer nuevas versiones del programa, se deberá utilizar el ejemplo anterior para, conocidas las transformaciones que generan el triángulo fractal, revisar su conexión con los desplazamientos del punto.

Ejercicio 3

Una vez con el programa del juego en la calculadora, en este ejercicio se propone modificar las transformaciones en su aspecto más sencillo, las traslaciones. Sobre el triángulo obtenido en la etapa previa, esta primera variación de las reglas del juego supone cambiar la posición de los tres vértices del triángulo. Se pide a los estudiantes que obtengan el triángulo rectángulo de Sierpinski que aparece en la figura 2, y otro con un ángulo obtuso como muestra la figura 3. Cada uno de ellos sigue constituido por tres copias, con factor de escala dos, pero de forma distinta y colocadas en posiciones diferentes. En el listado del programa, basta con modificar las expresiones que describen el desplazamiento de las dos coordenadas del punto al centro entre su posición y cada vértice. Se puede comprobar que la autosimilaridad de la figura se mantiene.

Con el juego del caos en la calculadora | El atractor

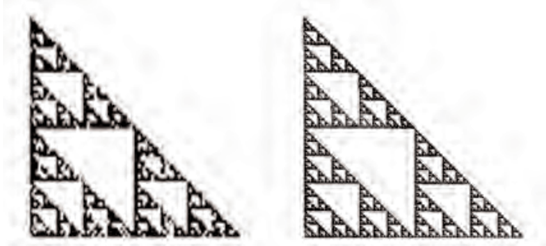


Figura 2. Triángulo rectángulo de Sierpinski obtenido como el equilátero, pero modificando las traslaciones (la posición de los vértices)

Con el juego del caos en la calculadora | El atractor

Figura 3. Triángulo obtusángulo obtenido igual que el equilátero de Sierpinski, pero modificando la posición de los vértices

Ejercicio 4

En general, cualquier transformación aplicada a un punto en el plano se convierte en un desplazamiento del punto a otra posición. La variación que se quiere obtener con este ejercicio se refiere al cambio de escala o relación de semejanza. Un escalado es una transformación en la que sólo cambian las distancias, todos los ángulos se conservan; se trata de una transformación particular que conserva el paralelismo. De igual manera que se ha visto con el triángulo de Sierpinski que la reducción a mitad de tamaño y traslación a un vértice del triángulo supone el desplazamiento a mitad de camino de la posición del punto, una contracción con factor de reducción k y traslación a un vértice supondrá el desplazamiento a una posición donde la distancia anterior d al vértice se reduce a d/k.

El ejercicio se presenta como la variación de los cambios de escala en las tres transformaciones que dan lugar al triángulo fractal, y la imagen resultante permitirá comprobar el efecto de las modificaciones realizadas. Tras su análisis, se concluye que las diferentes contracciones deben dar lugar a distintos desplazamientos del punto en el segmento que une su posición y el vértice elegido, que ya no serán al punto medio.

Se puede comenzar modificando la transformación que traslada al vértice superior, cambiándola a un factor de reducción tres. La contracción desplazará el punto sobre una línea recta hacia el vértice superior de tal manera que la nueva distancia sea 1/3 de la anterior. Si jugamos con esta nueva regla resultará una imagen muy diferente, con tres piezas autosimilares, dos de ellas exactamente de mitad de tamaño de la imagen completa, y la tercera de 1/3 del tamaño total. De nuevo, el número de copias es igual al número de vértices, y el factor de escala de cada transformación corresponde al factor de distancia al vértice.

Los estudiantes continuarán ganando confianza en el manejo de las transformaciones y en el control del programa si se les propone que ensayen modificaciones que sobre ese mismo programa supongan contracciones con diferentes reducciones de tamaño, con factor de reducción $k = 2, 3, 4$. Para que los cambios de escala en cada transformación correspondan a los factores propuestos, se edita y modifica el programa para desplazar el punto hasta 1/2, 2/3 y 3/4 del camino total hacia los vértices izquierdo, superior y derecho, respectivamente. El resultado de ejecutar el juego se muestra en la figura 4.

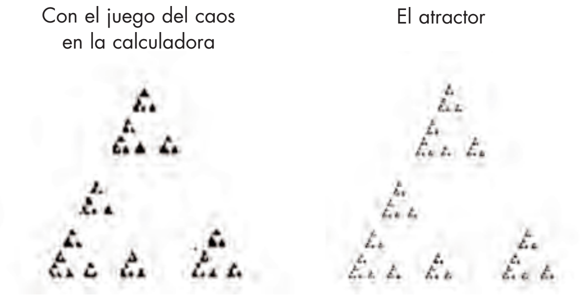


Figura 4. Configuración fractal resultado de diferentes contracciones. Los factores de reducción son 2, 3 y 4. Las traslaciones son las mismas que las del triángulo equilátero fractal

Ejercicio 5

Después de haber recreado diferentes figuras fractales definidas con tres transformaciones y, por consiguiente, utilizado el triángulo como elemento base o iniciador de las mismas, se abre una nueva perspectiva en el diseño de fractales al proponerse distinto número de contracciones y, por lo tanto, el uso de otros polígonos.

Aquí se sugieren algunos ejemplos sencillos con el cuadrado, el pentágono y el hexágono regulares. Dividir un cuadrado en nueve cuadrados iguales cuyos vértices coincidan con las terceras partes de las aristas del primero, permitirá definir varios generadores de figuras fractales. Basta con elegir un subconjunto cualquiera de esos cuadrados.

La figura 5 muestra un ejemplo donde aparecen el iniciador, el generador y la segunda etapa de la formación de un fractal muy conocido, inventado por Tamás Vicsek (Sander, 1987). Se pide dibujar un cuadrado dividido en subcuadrados y seleccionar algunos de ellos como generador de un fractal. Se puede también utilizar un triángulo dividido en subtriángulos (equiláteros, isósceles, rectángulos…). En estos casos sencillos, y a partir de imágenes como las de esta figura, los estudiantes

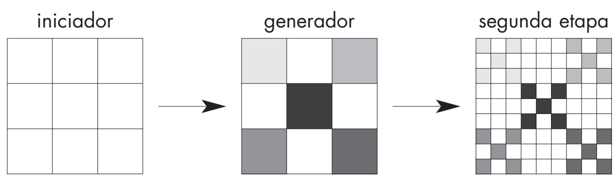


Figura 5. Esquema que muestra las primeras etapas de la generación de un fractal lineal a partir de un cuadrado. El atractor correspondiente se presenta en la figura 6

deben describir las transformaciones: calcular el factor de escala necesario y localizar las coordenadas de sus vértices. El resultado del juego con estas transformaciones se presenta en la figura 6.

Pero es necesario mantener una actitud crítica para no generalizar erróneamente, no todas las reglas en el juego del caos generan fractales. Cuando seleccionamos los cuatro vértices de un cuadrado y utilizamos un factor de escala de reducción de 2, ¿aparece el cuadrado de Sierpinski?

Con el juego del caos en la calculadora — El atractor

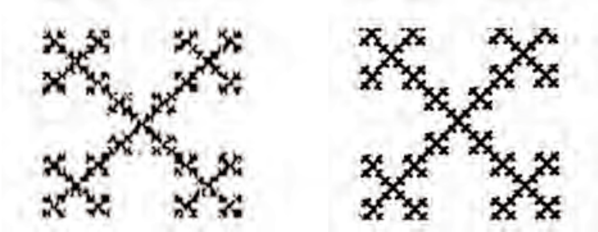


Figura 6. Las aspas de Vicsek definidas con cinco transformaciones con factor de reducción de tres, y traslación a los vértices y al centro de un cuadrado

Con el juego del caos en la calculadora — El atractor

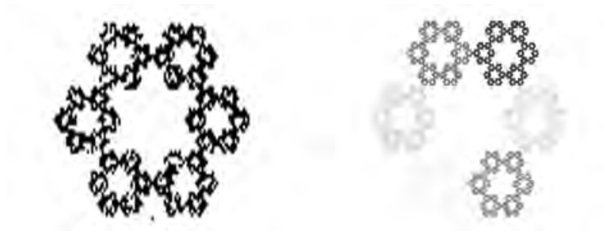


Figura 7. Hexágono de Sierpinski. Obtenido con seis transformaciones y un factor de reducción de tres. Aparecen curvas de Koch en el atractor

Ejercicio 6

Si en el ejercicio anterior se enunciaban las transformaciones, en este se propone realizar uno de esos ejemplos. Los estudiantes tienen que introducir en el juego seis transformaciones, cada una con una reducción con factor de escala tres, y traslación a los vértices de un hexágono regular. Al fractal resultante, que aparece en la figura 7, se le puede llamar hexágono de Sierpinski, y consta de seis partes autosimilares.

Otras transformaciones lineales que permiten definir fractales son las rotaciones alrededor de un punto.

Dentro del hexágono aparece otra famosa curva fractal, el límite interior de esta figura es la curva de copo de nieve de H. von Koch (1906). Un ejemplo parecido para construir es el pentágono de Sierpinski, que se puede obtener con cinco transformaciones con un factor de reducción de 3/8, y en el que también aparece una curva de Koch; de esta forma, los estudiantes revisan las propiedades de los polígonos regulares: las coordenadas de los vértices del pentágono y del hexágono.

Ejercicio 7

Otras transformaciones lineales que permiten definir fractales son las rotaciones alrededor de un punto. Usualmente, la rotación resulta asociada a una semejanza y/o a una traslación. Cuando alguna contracción incluye una rotación, además del desplazamiento hacia el vértice, es necesario girar el punto a su alrededor.

Se comienza con las rotaciones más sencillas de expresar en coordenadas cartesianas, las de 180° y de 90°, en cualquiera de los dos sentidos de giro, para después generalizar el procedimiento que permita representar rotaciones de cualquier ángulo. Para la rotación de 90° de amplitud alrededor del origen de coordenadas, obtenemos que la x transformada es la opuesta de la y previa, y la y transformada es igual a la x previa.

Se propone, como primer ejemplo, utilizar el conjunto de transformaciones que genera el triángulo equilátero fractal, para añadir una rotación de 180° en la contracción que desplaza al vértice superior. Obtenida la expresión analítica de la rotación, habrá que editar y modificar el programa en las instrucciones correspondientes a los desplazamientos hacia los vértices. La imagen resultante se muestra en la figura 8.

Este ejemplo se puede ampliar añadiendo en las demás transformaciones una rotación de 180° alrededor de cada vértice del triángulo. Otro conjunto de transformaciones sobre el triángulo aparece en la figura 9, con el efecto de una rotación de –90° sobre el vértice superior.

Con el juego del caos en la calculadora — El atractor

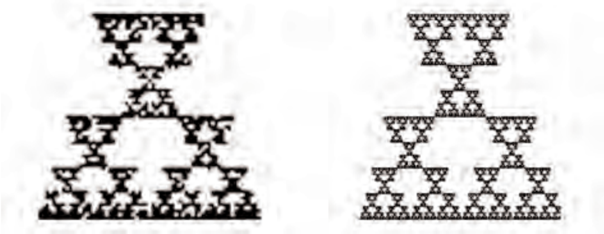


Figura 8. Imagen fractal descrita mediante tres transformaciones con factor de reducción dos, traslación a los vértices de un triángulo equilátero y una rotación de 180° alrededor del vértice superior

Con el juego del caos en la calculadora — El atractor

Figura 9. Figura fractal obtenida modificando el triángulo equilátero de Sierpinski al añadir a sus transformaciones una rotación de 90° alrededor del vértice superior

Ejercicio 8

Como segundo ejemplo de transformaciones con rotación, se pide construir la figura llamada árbol de Navidad autosimilar (Peitgen, Jürgen y Saupe, 1992). Se obtiene con las mismas tres transformaciones, de factor de reducción dos y traslación a los vértices del triángulo equilátero y con rotación en dos de ellas: de 90° en sentido horario alrededor del vértice inferior derecho, y de –90° alrededor del vértice inferior izquierdo.

Ejercicio 9

Pero investigar cómo actúa el juego del caos sobre un conjunto de transformaciones lineales, también nos puede llevar a modificar las reglas del juego en lo referente a la asignación de probabilidades para cada transformación. Los fractales geométricos más regulares se obtienen de forma más efectiva haciendo equiprobables todas las transformaciones. Esos ejemplos son la situación ideal para comprobar el efecto de modificaciones en la probabilidad de las diferentes transformaciones en el proceso aleatorio. El ejercicio consiste en modificar las probabilidades en algunos de los ejercicios anteriores, y comprobar cómo varían las densidades de puntos, cómo cuando el número de jugadas no sea muy grande, las regiones del fractal menos definidas son las correspondientes a las transformaciones menos probables.

Los fractales geométricos más regulares se obtienen de forma más efectiva haciendo equiprobables todas las transformaciones.

Ejercicio 10

Alternativamente al ejercicio 5, en el que se pedía la descripción de las transformaciones a partir de la figura del generador del fractal lineal, la realización de los ejercicios anteriores capacita a los estudiantes para deducir las reglas utilizadas en el juego a partir de la geometría de la figura fractal resultante. En este caso se pide la descripción de las contracciones que dan lugar a diversos fractales lineales. Se cuidará que las transformaciones resultantes sean sencillas, es decir, que las reglas no sean demasiado complicadas de describir. En muchos casos sencillos, el número de ejes radiales de simetría coincide con el número de vértices y de contracciones en la figura. La figura 10 presenta un ejemplo muy sencillo que se puede utilizar, en el que las transformaciones se reducen a contracciones y traslaciones.

Con el juego del caos en la calculadora — El atractor

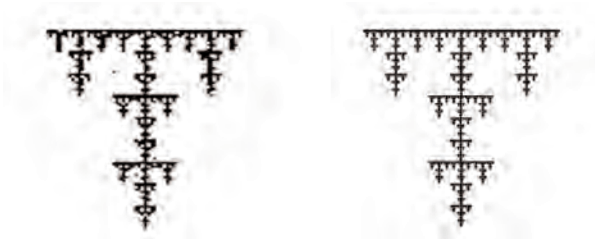


Figura 10. Fractal lineal que se define seleccionando cinco de los subcuadrados del iniciador de la figura 5. Las cinco transformaciones sólo son reducciones de factor tres y traslaciones

Ejercicio 11

Los fractales se caracterizan por su dimensión fractal, generalización de la dimensión euclídea, por lo que otro análisis interesante es la deducción de la dimensión fractal de cada una de las imágenes. Utilizando cualquiera de las definiciones de dimensión fractal, como por ejemplo la dimensión de homotecia de Haussdorff-Besicovitch (1919), se concluye que el número de transformaciones que generan copias del conjunto inicial, y el factor de escala en las mismas, son los determinantes de esta característica de cada fractal. Se propone, en este ejercicio, que los estudiantes deduzcan la dimensión fractal de las imágenes obtenidas en los ejercicios anteriores.

Cuando se llega al final de esta experiencia, del programa original del triángulo fractal sólo queda lo esencial del juego aleatorio del caos, que puede volver a revisarse con los estudiantes. Ellos, con la práctica adquirida, se atreverán con casi cualquier propuesta que se les haga de transformaciones en el plano, incluso las no-lineales.

En el diseño de esta actividad se pueden añadir ejercicios con mayor complejidad para atender a estudiantes de diferentes niveles en la misma clase. Sobre todos los ejercicios presentados, existen innumerables variaciones que permitirán a los estudiantes afianzar el carácter de cada tipo de transformación, su expresión analítica y su consecuencia gráfica. Hay numerosos objetos fractales que presentan características parecidas en los que seguir investigando las propiedades de las transformaciones geométricas y la autosimilaridad.

Conclusión

Como se indicó al principio, el propósito de esta propuesta es ofrecer una estrategia atractiva para mejorar las destrezas de los estudiantes en el manejo de las transformaciones lineales en el plano.

Esta innovación quiere responder a la necesidad del profesorado tanto de incorporar actualizaciones en el currículo de geometría, como la de fomentar en los estudiantes el uso de nuevas herramientas.

La rentabilidad del estudio de los fractales lineales en el aula está garantizada, permitiendo combinar conocimientos, procedimientos y habilidades de una manera eficaz, y sobre un tema de actualidad en las matemáticas. El planteamiento como investigación que hace esta propuesta y el manejo de un sencillo programa en la calculadora, fomentan el interés en su realización, con una implicación muy alta de los estudiantes en la tarea planteada desde el principio.

El aprendizaje significativo de la geometría analítica se consigue en muchas ocasiones desde la práctica de ejercicios de investigación como los presentados en esta actividad.

El aprendizaje significativo de la geometría analítica se consigue en muchas ocasiones desde la práctica de ejercicios de investigación como los presentados en esta actividad.

Juan C. Moreno-Marín
IES Leonardo da Vinci
Alicante.
Dpto. Física Aplicada,
Fac. Ciencias
Universidad de Alicante.
Societat d'Educació
Matemàtica de la Comunitat
Valenciana «Al-Khwarizmi»

Referencias bibliográficas

ALSINA C., C. BURGUÉS y J. M.ª FORTUNY (1987): *Invitación a la didáctica de la geometría,* Síntesis, Madrid.

BOSCH, M., y J. GASCÓN (1994): «La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de estudio de matemáticas», *Enseñanza de las Ciencias*, n.° 12, 314-332.

CABALLER SENABRE, M.ª J., J. CARRASCOSA ALÍS y L. PUIG ESPINOSA, (1986): «Establecimiento de las líneas de investigación prioritarias es la didáctica de las ciencias y las matemáticas», *Enseñanza de las Ciencias*, n.° 4, 136-144.

CALLEJO DE LA VEGA, M. L. (1994): *Un club matemático para la diversidad*, Narcea, Madrid.

DIENES, Z. P., y E. W. GOLDING (1972): *La geometría a través de las transformaciones*, *vols. 1, 2 y 3*, Teide, Barcelona.

FERNÁNDEZ RODRÍGUEZ, F., y J. PACHECO CASTELAO (1991): «Valor matemático elemental de los fractales», *Suma*, n.° 9, 4-10.

GALLARDO CALDERÓN, J. (1995): «Fractales y Azar. Un acercamiento mediante la calculadora gráfica», *Suma*, n.° 20, 69-72.

HAUSSDORFF, F. (1919): «Dimension und äusseres Mass», *Mathematische Annalen*, n.° 79, 157-179.

JÜRGENS, H., H. O. PEITGEN y D. SAUPE (1990): «El lenguaje de los Fractales», *Investigación y Ciencia*, n.° 169, 46-57.

KOCH, H. VON (1906). «Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes», *Acta Mathemática*, n.° 30, 145-174.

MANDELBROT, B. B. (1977): *The Fractal Geometry of the Nature* W. H. Freeman & Co Publishers, Nueva York. [Existe traducción al castellano (1997): *La Geometría Fractal de la Naturaleza*, Tusquets, Barcelona.]

NUÑEZ ESPALLARGAS, J. M.ª (1985): «Enseñanza de la geometría y didáctica genética», *Enseñanza de las Ciencias*, n.° 3, 131-135.

PEITGEN, H. O., H. JÜRGENS y D. SAUPE (1992): *Fractals for the Classroom*, Springer-Verlag, Nueva York.

SÁNCHEZ VÁZQUEZ, G. (1997): «La enseñanza de la geometría en el momento actual y en el futuro inmediato», *Suma*, n.° 14/15, 18-24.

SANDER, L. M. (1987): «Crecimiento Fractal», *Investigación y Ciencia*, n.° 126, 66-73.

SIERPINSKI, W. (1915): «Sur une curbe dont tout point est un point de ramification», *Comptes Rendus Acad. Paris*, n.° 160, 302.

CONVOCATORIA DEL CARGO DE SECRETARIO/A DE PRENSA DE LA FESPM

El Estatuto de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) establece, en su artículo 11, los cargos unipersonales, entre los cuales se contemplan las secretarías de área. A su vez, el Reglamento de la FESPM especifica en el artículo 7 las áreas de trabajo y en el artículo 9 el procedimiento de elección.

La Junta de Gobierno de la FESPM, en la reunión celebrada en Madrid el día 8 de febrero de 2003, ha decidido convocar la Secretaría de Prensa en los siguientes términos:

Podrá presentar su candidatura a la Secretaría de Prensa cualquier socio/a de una Sociedad Federada, con un año de antigüedad al menos.

La solicitud, dirigida al Presidente de la FESPM, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

1. Certificado en el que conste que es socio/a activo/a de una Sociedad Federada, y su antigüedad.
2. Un Proyecto en el que se exponga su línea de trabajo.

Las candidaturas podrán presentarse de cualquiera de las formas siguientes, teniendo en cuenta los plazos que en cada caso se señalan:

A) Por correo postal, hasta el 20 de junio de 2003, dirigido a:

   SR. PRESIDENTE DE LA FESPM

   Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas P. Sánchez Ciruelo

   ICE Universidad de Zaragoza

   C/ Pedro Cerbuna, 12 – 50009 - Zaragoza

B) Por correo electrónico hasta el 22 de junio de 2003. En tal caso el mensaje se dirigirá a: fvillarroya@able.es

La Junta de Gobierno de la FESPM elegirá al Secretario/a de Prensa, entre los/as candidatos/as presentados/as para un periodo de 4 años, en su reunión del día 3 de julio de 2003. Previamente deberá oírse al Secretario General. Una vez decidida la elección se comunicará oficialmente a las Sociedades Federadas, y a la persona elegida.

Madrid, a 8 de febrero de 2003

José Luis Álvarez García

Secretario General

SUMA 42
febrero 2003, pp. 81-89

Humor gráfico para la enseñanza y el aprendizaje del azar

Mónica Beatriz Guitart-Coria
Pablo Flores Martínez

IDEAS Y RECURSOS

Es frecuente emplear elementos humorísticos en clase para darle amenidad. En este artículo queremos mostrar el interés que puede tener el empleo del humor en clase, para educar la actitud de los alumnos. Esto es especialmente indicado en el concepto de probabilidad y azar. La sociedad actual necesita que sus ciudadanos estén educados en el azar para afrontar fenómenos naturales y del mundo del juego. Es necesario, pues, que la enseñanza del azar influya en el ser del futuro ciudadano, generándole actitudes que le permitan afrontar sus aplicaciones sociales. Se presentan algunas tareas de enseñanza basadas en el análisis de viñetas humorísticas, para enseñar el azar y la probabilidad, implicando de manera humorística al lector con los conceptos matemáticos tratados.

Es FRECUENTE que el profesor utilice elementos humorísticos en su clase, tratando con ello de hacerla más amena. En este artículo queremos mostrar el interés que puede tener el empleo del humor en clase, con una intención cognitiva que no pierde de vista la emotividad, a la que, naturalmente, debe unirse el aspecto distendido y ameno. Proponemos este empleo en la enseñanza del concepto de probabilidad, que tiene que sustentarse en la caracterización adecuada de la idea de azar, tan presente en la vida cotidiana.

El tratamiento del azar en la enseñanza obligatoria no puede limitarse al aprendizaje de instrumentos matemáticos con vistas a su aplicación y ampliación en posteriores cursos, sino que tiene que atender a su papel enculturador (Bishop, 1999), relacionado con la educación para afrontar fenómenos naturales y el mundo del juego (MEC, 1991). Por tanto, en el campo del azar se pone de manifiesto con mayor intensidad la necesidad de que su estudio influya en el *ser* del futuro ciudadano, generándole *actitudes* que le permitan afrontar el amplio campo de aplicaciones que tiene en su desenvolvimiento futuro (seguros, experimentos científicos, previsión de enfermedades y del tiempo meteorológico, etc.), o interpretar adecuadamente las informaciones (relativas a los fenómenos mencionados, pero también a los juegos de azar y su propaganda, no siempre bien intencionada) que le están bombardeando y moldeando su vida. En este artículo presentaremos algunas viñetas que pueden ayudar a dar ideas del azar y la probabilidad, enfatizando empleos cotidianos de la idea de azar, proponiendo que los alumnos las analicen y estudien sus términos y significados.

El humor en la enseñanza

El humor puede emplearse en la enseñanza como recurso para amenizar y distender, pero también puede tener otros empleos (Francia y Fernández, 1995). Nosotros hemos presentado varios (Flores, 2003, 1997, 1998*a* y 1998*b*; Grupo LaX, 1998), siempre referidos a educación matemática.

La investigación en educación matemática que se ha ocupado de los aspectos emocionales ha apoyado el empleo de elementos anecdóticos. Mc Leod (1992) propone anécdotas para detectar y crear actitudes hacia las matemáticas. Gómez Chacón (2000) emplea viñetas humorísticas en sus cursos de formación emocional de profesores de matemáticas. El empleo de elementos evocadores en educación matemática es amplio, tal como hemos destacado al analizar las metáforas sobre la enseñanza (Flores, 1999). Paulos (1994) manifiesta una relación entre el humor y la lógica del discurso cotidiano, y aporta una jocosa mirada sobre la presencia de las matemáticas en los medios de comunicación (Paulos, 1996), al igual que Fernández Aliseda y otros (2000). Bracho (1999) propone chistes para la enseñanza de las matemáticas. Y no podemos olvidar que el mismo NCTM que, en la revista *Mathematics teaching in the Middle School*, dedica un lugar a las viñetas humorísticas y propone cuestiones para emplearlas en clase. Además, el NCTM ha editado un cuadernillo sobre matemáticas y humor (Azzolino y otros, 1998). Gonick y Smith (1992) han escrito una estadística en comic, recientemente traducida y publicada en España.

Humor y cambio

En el análisis psicoanalítico que Freud (1969) hace del humor enfatizaba su carácter espontáneo, con lo que al surgir de una actuación no planificada, hace que incida directamente en el subconsciente. Watzlawick (1992) va mas lejos al proponer recurrir al humor para tratar de incidir sobre aspectos no previstos por el interlocutor, especialmente en el campo de la psiquiatría. La idea de estos autores es que, si queremos proponer un cambio en alguien, tenemos que valernos de elementos que incidan en sus creencias más profundas, aunque el sujeto no sea consciente de su implicación. En la educación matemática que afronta el azar y la probabilidad no sólo se pretende que el alumno adquiera conocimientos, sino que también se vean afectadas sus actitudes; no se trata sólo de suministrar instrucción matemática, sino que se pretende que influya en la manera de contemplar el mundo aleatorio en el que está sumergido, afrontándolo de manera más científica. Por tanto, no basta con exponer, de manera suficientemente clara, los diversos conceptos, sino que el profesor tiene que tratar de que estos conceptos influyan en la vida de los aprendices. El alumno ha de hacerse consciente de sus concepciones erróneas, que suelen estar muy arraigadas, y que no es posible corregir simplemente con explicaciones.

…vamos a mostrar ejemplos de viñetas que contienen situaciones cotidianas relacionadas con el azar, tratando de mostrar los elementos evocadores que pueden suministrar, para que los aprendices las analicen y se adueñen de los aportes cognitivos y afectivos que llevan consigo.

Tal como apunta Watzlawick y otros (1976), el cambio pretendido es un cambio que no corresponde a las expectativas del alumno, por lo que tiene que anclarse y realizarse en terrenos inesperados por el niño. En este caso, en la educación, estamos en una situación próxima a las que se proponen en psiquiatría, tratando de favorecer que se opere en el niño un cambio en la interpretación del mundo, que consista en una nueva forma de estructurar esos conocimientos y de relacionarlos con los acontecimientos.

Con esta perspectiva, los educadores matemáticos necesitamos recursos que hagan que el educando apele a su posicionamiento vital, para ponerlo en tela de juicio, y, si es posible, para que le haga cambiar de manera efectiva de comportamiento, guiado por la intuición percibida. El humor, tal como señalan Watzlavick (1992) y Paulos (1994), entre otros, permite la relación de la persona con elementos interpretativos que tienen como referencia aspectos no contemplados por ella. Para ejemplificar esto, en este artículo vamos a mostrar ejemplos de viñetas que contienen situaciones cotidianas relacionadas con el azar, tratando de mostrar los elementos evocadores que pueden suministrar, para que los aprendices las analicen y se adueñen de los aportes cognitivos y afectivos que llevan consigo.

El azar y el humor

El azar y el humor conviven con nosotros, hasta tal punto que creemos que se puede manipular el azar, creemos que se puede vivir sin humor... Veamos cómo el humor puede ayudarnos a tomar contacto con el azar y la probabilidad.

Vamos a partir de que «[…] entendemos que el azar es anterior a la probabilidad, lo contrario de lo que se ve en los libros de texto, donde lo aleatorio suele definirse en términos de probabilidad (véase, por ejemplo, la definición que nos dan de muestra aleatoria)». (Gutiérrez, 1992, p. 19). De aquí, la importancia fundamental que tiene el manejar el concepto de azar con fluidez, sin dejarnos influenciar por concepciones erróneas basadas en «el enfoque subjetivo del azar, el cual está referido al conocimiento e ignorancia, y el llamado azar objetivo, no obstante, la importancia que pueda tener desde el punto de vista práctico o científico, es en realidad una clase especial de azar subjetivo y una derivación de éste. […] La expresión 'por azar' hace referencia más bien al estado de nuestra información acerca de la concurrencia del suceso considerado con el suceso tomado como premisa» (Keines, 1973, p. 317 citado en Gutiérrez, 1992, p. 27).

Vemos entonces, que la información, su uso e interpretación, es fundamental para construir cualquier concepto basado en el azar. Nuestro concepto de azar suele estar basado en algunos preconceptos que hacen de él algo huidizo que no podemos manejar, o por el contrario, es tal que, ante determinadas condiciones creemos poder «domesticarlo» a nuestro antojo. Ian Stewart (2001) comenta que en un pasado remoto la naturaleza aparecía como algo incomprensible, gobernado por el antojo de los dioses, luego los científicos creyeron haber descubierto las leyes que explicaban cada movimiento del universo, pero esta teoría comenzó a debilitarse y a intranquilizar a los que pensaban que todo estaba en un orden natural, perfecto y controlado, con la introducción de los conceptos de incertidumbre y azar, que aunque parezca contradictorio, ponen orden al caos.

Nuestro concepto de azar suele estar basado en algunos preconceptos que hacen de él algo huidizo que no podemos manejar, o por el contrario, es tal que, ante determinadas condiciones creemos poder «domesticarlo» a nuestro antojo.

En la viñeta de la figura 1, Carlos Hernández refleja una forma de concebir el orden del mundo, que se presta a debatir sobre esta cuestión. A partir de ella podemos proponer a los alumnos que respondan a cuestiones como las siguientes:

Cuestiones sobre la viñeta 1

1) Buscar significado de los términos *caos* y *azar* y señalar coincidencias y diferencias.
2) Ordenar según la posibilidad de predecir, algunos fenómenos, como: lo que va a salir al lanzar un dado, la aparición de un terremoto, la hora de las mareas, el tiempo atmosférico, un crack financiero.
3) Indicar en qué se parecen y diferencian estos dos fenómenos: la aparición de un terremoto y el lanzamiento de un dado.

En 1800 se decía que «azar» era una mera palabra que no significaba nada o bien que se trataba de una idea del vulgo que designaba la suerte o hasta la falta de ley, de manera que debía quedar excluida del pensamiento de la gente ilustrada. Todo suceso derivaba necesariamente, por lo menos en el mundo fenoménico, de una serie anterior de condiciones. Hasta los estudiosos de la medicina y la vida, que rechazaban las leyes universales en su dominio, sostenían que existían eslabones particulares e individuales de una causalidad necesaria y no prestaban apoyo a la idea fundamental de azar (Hacking, 1995, p. 9).

En la viñeta de la figura 2, la administración hace uso del azar para tomar decisiones, mediante algo más que el juego de palabras (azar = fortuna). Puede parecer un rela-

Figura 1. Viñeta Orceman

to cruel y extremista pero... ¿ocurre en nuestra vida cotidiana? Pensemos en los procesos que determinan: la incorporación al servicio militar, la escuela a la que asistirán nuestros hijos, las cuestiones que van a aparecer en un examen, etc.

Figura 2. Quino, la inspección de hacienda y la fortuna

Para aclarar esta polisemia, proponemos las siguientes cuestiones:

Cuestiones sobre la viñeta 2

1) Hacer una lista de los términos relacionados con el azar que aparecen en el texto.
2) Buscar significados del término «fortuna». Buscar las acepciones que se emplean en la viñeta, y relacionarlas entre sí.
3) Estudiar posibles estrategias para determinar lo que cada ciudadano tiene que pagar como impuestos, o para seleccionar las preguntas de un examen.

Un aspecto importante lo constituye la creencia en el azar que algunos individuos profesan, por ejemplo: al apostar en la lotería al número que no ha salido, suponiendo que ya es hora de que salga; creer que hay números del dado que salen más que otros; creer que el resultado obtenido depende de la forma en que se tire el dado o se barajen las cartas, etc. Para rebatir estas creencias, es necesario insistir, en nuestra enseñanza, sobre el concepto de azar y las creencias que tienen nuestros alumnos, ligadas a éste concepto. Más allá de dar definiciones formales, es necesario lograr desarrollar actitudes correctas hacia el azar, que consideren sus limitaciones y adviertan sobre las ventajas y

Figura 3. Quino, Felipe y el destino

desventajas de tomar decisiones a partir de él. Uno de los elementos que influyen es «el destino».

El creer en el destino nos muestra, en la viñeta de la figura 3, cierta contradicción, por suponer que tenemos ya fijado nuestro actuar pero que hay cierta «flexibilidad» que nos permite alterarlo. Por tanto, podemos plantear las siguientes cuestiones:

Cuestiones sobre la viñeta 3

1) Buscar significados de «destino», destacando los que se relacionan con azar.
2) Ordenar los sentidos de destino que has encontrado por el grado en el que podemos manejarlo.
3) Buscar otras situaciones familiares en las que se utilice destino, y estudiar su grado de predeterminación y de importancia para tomar decisiones.

Observamos que el concepto «azar» se utiliza con diversos nombres (Godino y otros, 1989), tales como los reflejados en estas viñetas: causa del caos, fortuna (confusión que se explota en la figura 2), destino, etc. Pero además, la idea que tenemos del azar no repercute necesariamente en nuestras actitudes. No es infrecuente que expertos estadísticos muestren actitudes hacia jugar un determinado número en la lotería, por ejemplo. Nuestra propuesta es que en la enseñanza se utilicen viñetas que puedan ayudar a sacar a relucir las creencias de los alumnos sobre el azar, y tratar de confrontarlas entre sí, y con su utilización práctica en el mundo cotidiano, mostrando la importancia del estudio de la estadística y cálculo de probabilidades como instrumentos para afrontar fenómenos ligados al azar.

La viñeta de la figura 4 nos da ocasión de que el alumno reflexione sobre el papel que la sociedad le ha asignado al azar. Para ello proponemos que responda a las cuestiones siguientes:

Informalmente la probabilidad es tratada como un concepto ambiguo que involucra deseos personales, supersticiones y hasta toma de decisiones basadas en el «sentido común».

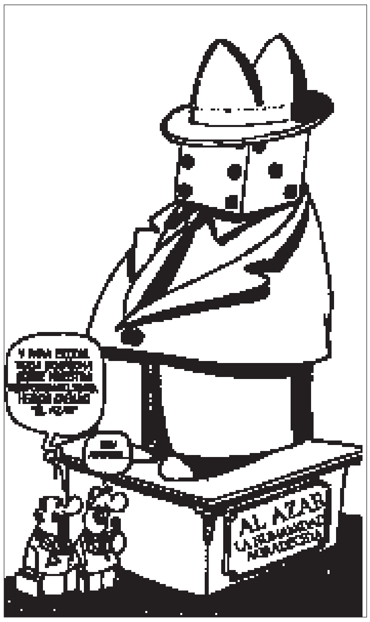


Figura 4. Monumento al azar

Cuestiones sobre la viñeta 4

1) Anota sucesos de tu vida cotidiana que achaques a la suerte (resultado de un examen, resultado de un partido de fútbol de tu equipo, tu estado de humor al levantarte, etc.).
2) Estudia las características de todos ellos, y ordena desde el más azaroso al menos.
3) Busca las condiciones para que un fenómeno sea considerado como aleatorio, y juzga cuál de los anteriores acontecimientos es realmente aleatorio.

La probabilidad y el humor

Los usos de la probabilidad son muy variados (Godino y otros, 1989). Informalmente la probabilidad es tratada como un concepto ambiguo que involucra deseos personales, supersticiones y hasta toma de decisiones basadas en el «sentido común». Formalmente, requiere un soporte lógico, a partir del cual construir modelos de fenómenos aleatorios, leyes y fundamentos que sustenten esta estructura. Ambos usos nos presentan dificultades a la hora de su enseñanza, si queremos que los alumnos hagan una utilización correcta de la misma.

Vamos a presentar viñetas en las que, informalmente, se trata la probabilidad según distintas ópticas.

> No se hace nada extraño, al distinguir entre el conocimiento que tenemos de nuestra propia existencia y el que dice que 'dos y dos son cuatro'. Este sentimiento absoluto e infalible será llamado certeza. Tenemos grados de conocimiento menores que llamaremos

Figura 5. Mafalda y probabilidad de sopa

> grados de creencia, pero que son en realidad grados de conocimiento... Por grado de probabilidad significamos realmente, o debemos significar, grados de creencia... Probabilidad se refiere entonces, e implica, creencia, más o menos, y creencia no es más que otro nombre del conocimiento imperfecto, o puede expresar el estado de la mente en conocimiento imperfecto. (De Morgan, 1847, citado en Gutiérrez, 1992, p. 293).

Muchas veces, se usa el concepto de probabilidad partiendo del sentido común, basándose en experiencias previas, en intuiciones o creencias, sin realizar cálculos. Esta noción subjetiva de probabilidad, obviamente, depende de quien la interprete y, muchas veces, se ve afectada por sucesos que alteran su «valor», dando lugar a un concepto intuitivo de probabilidad condicionada. En la viñeta de la figura 5 observamos la subjetividad al suponer que «desmejorar» se debe a la presencia de sopa, estando además, este hecho condicionando su estado de ánimo. En el lenguaje cotidiano usamos «probablemente», «probabilidad de…», etcétera, para indicar nuestra incertidumbre ante algo incierto exterior a nosotros (Matte, 1995). Para evitar sentidos tan subjetivos de probabilidad, sugerimos que los alumnos realicen las siguientes cuestiones:

Cuestiones sobre la viñeta 5

1) Identifica los elementos que asemejan, y los que diferencian, los acontecimientos de esta viñeta con la predicción del tiempo atmosférico.
2) Estudiar si nuestro estado de ánimo está relacionado de manera probabilística, y si puede compararse con la predicción del tiempo atmosférico.
3) (En caso de trabajarlo después de la instrucción probabilística). Analiza el suceso aleatorio al que Mafalda está aplicando probabilidad, indicando su espacio muestral y las informaciones necesarias para determinar la probabilidad.

La teoría frecuencial permite tratar fenómeno en donde no existe una «regularidad» en los elementos usados para la experimentación.

Las personas asignan probabilidades sin basarse en una estructura lógica proposicional. Sin embargo, la idea estadística de probabilidad es objetiva y aunque se basa en un grado de confianza, su relación con la proporcionalidad tiene que matizarse con la presencia de fenómenos verdaderamente aleatorios.

La probabilidad puede tratarse a partir del resultado de una experimentación, lo que da origen a la concepción frecuencialista. La teoría frecuencial permite tratar fenómenos en donde no existe una «regularidad» en los elementos usados para la experimentación. En las viñetas de las figuras 6 y 7 se presentan dos situaciones frecuencialistas con distintos desenlaces.

Las viñetas dejan ver un concepto de probabilidad basado en la cantidad de veces que aparece el suceso objeto de análisis, respecto a un universo determinado. En el primer caso (figura 6) se hace uso de una comparación, tratada como proporción. En la segunda tira cómica (figura 7) observamos que una persona puede basarse en sus propias creencias respecto a una situación y «medir» la credibilidad según ciertos preconceptos. Este grado de creencia sólo se sustenta en una lógica «cotidiana» coherente. En ambas situaciones, la frecuencia con que ocurren los hechos proporcionan la idea de probabilidad, tan comúnmente ligada al porcentaje, en general, intuitivo de una situación

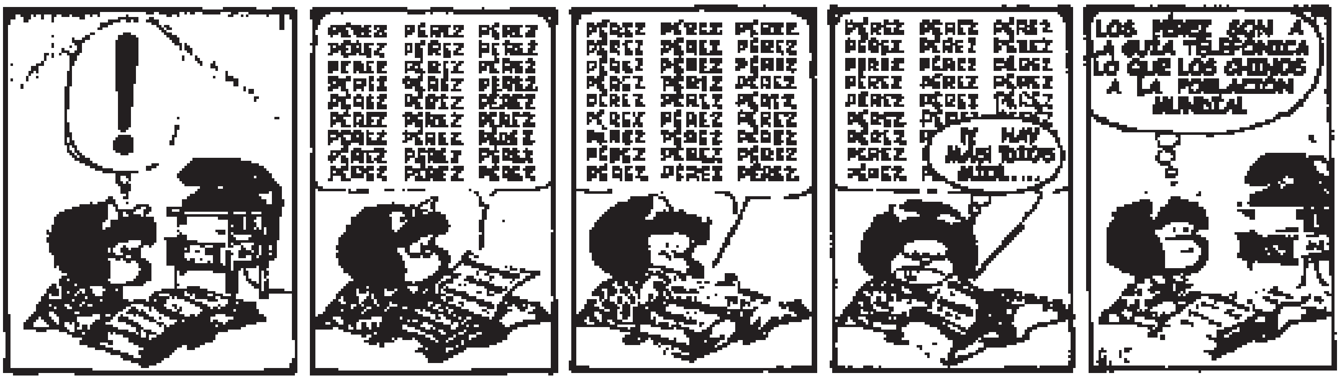


Figura 6. Mafalda y la lista de teléfonos

Figura 7. Mafalda y los países

dada. Pero ¿son igualmente azarosos los fenómenos referenciados? Para estudiar esto sugerimos las siguientes cuestiones:

> ***Cuestiones sobre las viñetas 6 y 7***
>
> 1) Define los fenómenos que se contemplan en las viñetas, los espacios muestrales y los sucesos elementales.
> 2) Estudias los principios del azar que verifican los fenómenos citados.
> 3) Indicar los sucesos a los que se le están asignando probabilidades en uno y otro caso, verificando si está en condiciones de aplicar la probabilidad laplaciana.

Estos ejemplos nos sirven para ver una «actitud» hacia la probabilidad. La persona que interviene actúa racionalmente, después de ver ciertas condiciones iniciales; suponemos que no está segura de lo que va a ocurrir y que en su decisión, por uno u otro resultado, pesan en su ánimo las condiciones psíquicas del momento, sus creencias personales, etc.

…en las predicciones hacemos uso de la probabilidad, pero considerada en relación con la evidencia contenida en otra proposición, que actúa como cuerpo de evidencia.

Para comprender la tira de la figura 8 hay que precisar que el término papelones, se emplea en Argentina para referirse a una situación bochornosa. En ella se emplea la máquina como un objeto que rompe la subjetividad, o que asume la responsabilidad de los errores de predicción. Esta lectura nos permite fundamentar que la probabilidad tiene que partir de una teoría. Para ello, en las predicciones hacemos uso de la probabilidad, pero considerada en relación con la evidencia contenida en otra proposición, que actúa como cuerpo de evidencia. Es cierto que la mayor parte de los juicios de probabilidad son formulados en términos absolutos, sin ninguna referencia a ese cuerpo de evidencia. Cuando nos anuncian lluvias, esta afirmación debe estar acompañada de una base, a partir de la cual se puede decir esto, como «dadas las condiciones meteorológicas actuales, y si éstas se mantienen…». Es

Figura 8. Felipe y el pronóstico del tiempo

fundamental, entonces, usar correctamente las evidencias disponibles, a fin de dar juicios de probabilidad satisfactorios, y así evitar «papelones». Surge en este punto una ambigüedad típica a la hora de hacer uso de las predicciones. Algunas veces las personas deciden en función del pronóstico del tiempo y otras, ante la escasa credibilidad de éste, suponen que no se cumplirá. Cuando se dice: «dadas las condiciones metereológicas actuales, […], con una borrasca en el…, lloverá, probablemente, mañana»; vemos que se ha emitido un juicio (dado por una persona) y las condiciones iniciales en las que se basa. Sin duda, ante este juicio se presentan dos posibles resultados, que, ante el marco de referencia propuesto, hace que uno de ellos sea más probable que el otro. Cuando nos expresamos en estos términos, hay una razón que nos permite volcarnos hacia uno de los sucesos, así, la probabilidad vive sobre argumentos no formalizados, que se ubican entre la aceptación y la refutación.

Es importante preparar, sobre todo actitudinalmente, a nuestros alumnos, en el correcto uso de «probable», «posible», etc., para que emitan sus juicios y tomen sus decisiones a partir de una base correcta de condiciones iniciales. Para ello proponemos las siguientes cuestiones relativas a la viñeta:

Cuestiones sobre la viñeta 8

1) Justifica si una máquina puede hacer predicciones mejores del tiempo, de la que se hacen en los espacios televisivos.
2) Estudia si el tiempo meteorológico es un fenómeno aleatorio y su espacio muestral.
3) Escucha la información meteorológica de un diario de TV y apunta los instrumentos que emplean para ella. ¿Quién hace la predicción?

Al enseñar probabilidades en la educación obligatoria, es importante, resaltar que para su utilización adecuada hay que indicar los recursos necesarios, el grado de certidumbre al dar un resultado y el marco de referencia que abarcan las conclusiones, tal como vemos aparece en la historia de la figura 9, que nos permite volver a insistir en el interés que tiene el empleo de las viñetas humorísticas para la enseñanza y aprendizaje del azar y la probabilidad. En ella se pueden hacer las siguientes cuestiones:

Figura 9. Seguridad de ganar

Cuestiones sobre la viñeta 9

1) Define el espacio muestral de una rifa (como la de un coche), estudia si verifica los principios de la probabilidad laplaciana.
2) Identifica el suceso seguro, y algunos sucesos del fenómeno, y calcula la probabilidad de ganar si se compran alguna proporción de boletos.
3) Busca una noticia sobre sondeos de opinión, y destaca los indicadores de confianza de éxito en la predicción, y de error.

Conclusiones

En este artículo hemos hecho un recorrido por distintos aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad, comenzando por el análisis del azar. Para llevar a cabo una enseñanza que tome en consideración estos aspectos, proponemos completar la instrucción matemática formal, con la realización de una serie de tareas de análisis de viñetas humorísticas (Flores, 2003) en las que se alude al azar y la probabilidad. Con ello tratamos de que los alumnos relacionen de manera distendida y significativa, las concepciones cotidianas del azar y probabilidad, con las científicas, tratando con ello que la formación científica influya en la actitud del niño frente a las situaciones azarosas cotidianas.

…los alumnos relacionen de manera distendida y significativa, las concepciones cotidianas del azar y probabilidad, con las científicas, tratando con ello que la formación científica influya en la actitud del niño frente a las situaciones azarosas cotidianas.

Mónica B. Guitart-Coria
Universidad Nacional de Cuyo. Mendoza. Argentina
Pablo Flores
Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

Referencias bibliográficas

AZZOLINO, A., L. SILVEY y B. HUGHES (1988): *Mathematics and Humour*, NCTM.

BRACHO, R. (1999): *Actividades recreativas para la clase de matemáticas*, Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía, Córdoba.

FERNÁNDEZ-ALISEDA, A. y otros (2000): *Lectura matemática de un periódico*, CEP de Castilleja de la Cuesta, Sevilla.

FLORES, P. (2003): *El humor gráfico como recurso didáctico para el aula de matemáticas*, Arial Ediciones, Granada.

FLORES, P. (1997): «La utilización del humor para facilitar la comunicación entre educadores matemáticos», *Educación Matemática*, Vol. 9, N.° 3, 52-62.

FLORES, P. (1998*a*): «Matemáticas y… viñetas», en *Seminario de recursos didácticos*, SAEM Thales, Granada (CD).

FLORES, P. (1998*b*): «Mafalda y las matemáticas», en DE LA FUENTE, M. y otro (Eds.). *VIII J.A.E.M. Thales*, Universidad de Córdoba y SAEM Thales, Córdoba, 133-138.

FLORES, P. (1999): «Empleo de metáforas en la formación de profesores de matemáticas», *Educación Matemática*, Vol. 11, n.° 1, 84-101.

FRANCIA, A. y J.D. FERNÁNDEZ (1995): *Animar con humor*, CCS, Madrid.

FREUD, S. (1969): *El chiste y su relación con el inconsciente*, Alianza, Madrid.

GODINO, J.D., C. BATANERO y M.J. CAÑIZARES (1989): *Azar y probabilidad*, Síntesis, Madrid.

GÓMEZ CHACÓN, I. (2000): Matemática emocional, Narcea, Madrid.

GOICK, L. y W. SMITH (1993): *The cartoon guide to statistics*, HarperPerennial, New York.

GRUPO LaX (1998): «Matemáticas en el humor. Exposición de chistes matemáticos», *VIII J.A.E.M. THALES*, Jaén.

GUTIÉRREZ, S. (1992): *Filosofía de la Probabilidad*, Tirant lo Blanch. Valencia.

HACKING, I. (1995): *La domesticación del azar,* Gedisa, Barcelona.

MATTE, F. (1995): *Gramática comunicativa del español*, Edelsa, Madrid.

Mc LEOD, D.B. (1992): «Research on affect in mathematics education: A reconceptualization», en GROUWS, D. (Ed.) *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, NCTM, New York, 575-596.

MEC (1991): *R.D. 1007/1991, 14 de Junio, Enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. BOE n.° 152, de 26 de Junio.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS: *Mathematics teaching in the middle school*.

PAULOS, J.A. (1994): *Pienso, luego río*, Cátedra, Madrid.

PAULOS, J.A. (1996): *Un matemático lee el periódico*, Tusquets, Barcelona.

STEWART, I. (2001): *¿Juega Dios a los dados?*, Crítica, Barcelona.

WATZLAWICK, P. y otros (1976): *Cambio*, Herder, Barcelona.

WATZLAWICK, P. (1992): *El lenguaje del cambio*, Herder, Barcelona.

Viñetas

[1] HERNÁNDEZ, C. (1999): *Orceman*, IDEAL, Granada.

[2] QUINO (1999): *¡Cuanta bondad!*, Lumen, Barcelona.

[3, 4, 5, 6 y 7] QUINO (1992): *Todo Mafalda*, Lumen, Barcelona.

[8] PIANT (1994): *PLOT 69.*

[9] HART, J. (1975): *Before Christo*.

CONVOCATORIA DEL CARGO DE SECRETARIO/A DE RELACIONES INTERNACIONALES CON IBEROAMÉRICA DE LA FESPM

El Estatuto de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) establece, en su artículo 11, los cargos unipersonales, entre los cuales se contemplan las secretarías de área. A su vez, el Reglamento de la FESPM especifica en el artículo 7 las áreas de trabajo y en el artículo 9 el procedimiento de elección. La Junta de Gobierno de la FESPM ha considerado oportuno, además, constituir dos secretarías de relaciones internacionales, una para las relaciones con Europa y otra para las relaciones con Iberoamérica.

La Junta de Gobierno de la FESPM, en la reunión celebrada en Madrid el día 8 de febrero de 2003, ha decidido convocar la Secretaría de Relaciones Internacionales con Iberoamérica en los siguientes términos:

Podrá presentar su candidatura a la Secretaría de Relaciones Internacionales con Iberoamérica cualquier socio/a de una Sociedad Federada, con un año de antigüedad al menos.

La solicitud, dirigida al Presidente de la FESPM, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

1. Certificado en el que conste que es socio/a activo/a de una Sociedad Federada, y su antigüedad.
2. Un Proyecto en el que se exponga su línea de trabajo.

Las candidaturas podrán presentarse de cualquiera de las formas siguientes, teniendo en cuenta los plazos que en cada caso se señalan:

A) Por correo postal, hasta el 20 de junio de 2003, dirigido a:
SR. PRESIDENTE DE LA FESPM
Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas P. Sánchez Ciruelo
ICE Universidad de Zaragoza
C/ Pedro Cerbuna, 12 – 50009 - Zaragoza

B) Por correo electrónico hasta el 22 de junio de 2003. En tal caso el mensaje se dirigirá a: fvillarroya@able.es

La Junta de Gobierno de la FESPM elegirá al Secretario/a de Relaciones Internacionales con Iberoamérica, entre los/as candidatos/as presentados/as para un periodo de 4 años, en su reunión del día 3 de julio de 2003. Previamente deberá oírse al Secretario General. Una vez decidida la elección se comunicará oficialmente a las Sociedades Federadas, y a la persona elegida.

Madrid, a 8 de febrero de 2003

José Luis Álvarez García

Secretario General

SUMA 42

febrero 2003, pp. 91-96

El gran torneo cibermágico

Joaquín Aguilar Barriuso

MISCELÁNEA

El hombre es un ser al que la naturaleza ha expulsado de su seno, forzándole así a inventarse su propio mundo o a perecer. En el mundo cibermágico sus seres poseen su propia acción, pilotan su propia vida, son libres y la actividad vital es su desarrollo y supervivencia. Ya lo cantaba el poeta:

¿Y ha de morir contigo el mundo mago]
donde guarda el recuerdo
los hálitos más puros de la vida,
la blanca sombra del amor primero,]
la voz que fue a tu corazón, la mano]
que tú querías retener en sueños,
y todos los amores
que llegaron al alma, al hondo cielo?]
¿Y ha de morir contigo el mundo tuyo,]
la vieja vida en orden tuyo y nuevo?]
¿Los yunques y crisoles de tu alma]
trabajan para el polvo y para el viento?]

EL REY Binar*01*

En el lejano y mágico país de Infolandia reinaba desde hacía muchos años un todopoderoso señor llamado Binar*01*. Por extraño que parezca –y a fe cierta que a sus súbditos así se lo pareció–, al comienzo de su reinado suprimió por real decreto todas las cifras excepto el cero y el uno. Algunos pensaban que esto era debido a que en su nombre solo aparecían esas cifras y menospreciaba a todas las demás; otros sostenían que tal hecho se debía a una manía persecutoria surgida en su niñez al aprender la tabla de multiplicar por un número mayor que uno. Lo cierto fue que, después de anunciar la desaparición de las cifras distintas de cero o uno (no se podía ni nombrarlas bajo pena máxima de ser multiplicado por cero), se produjeron grandes manifestaciones de rechazo por todo el país.

La más tumultuosa tuvo lugar en el centro neurálgico de Infolandia, un lugar llamado Chiptown, donde confluían de muchos lugares grandes y espaciosas vías de comunicación, amplias autopistas por donde circulaban a gran velocidad buses llenos a rebosar de ciudadanos descontentos. La gran revuelta comenzó en el Memory Center y, de forma bastante aleatoria y descontrolada, se fue dispersando por pequeños distritos periféricos, donde rápidamente fue sofocada por la guardia real, que llegó incluso a registrar buscando cifras sospechosas y hasta metió en celdas personales a los más revoltosos.

El gran descontento provocó que la medida no entrase en vigor hasta pasado un largo periodo de adaptación. En todas las escuelas se cambiaron paulatinamente las viejas tablas de sumar por otras que, aunque al principio resultaban bastante chocantes, poco a poco se fueron imponiendo por su sencillez y además se aprendían fácilmente. El nuevo sistema de contar recibió el nombre de *binario*[1] en honor del soberano de Infolandia. Como los números binarios sólo contenían ceros y unos se podía establecer una equivalencia entre los números decimales y binarios de la siguiente forma:

$$0 = \mathit{0},\ 1 + 0 = 1 = \mathit{1},\ 1 + 1 = 2 = \mathit{10},\ 1 + 1 + 1 = 3 = \mathit{11},$$
$$1 + 1 + 1 + 1 = 4 = \mathit{100},\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 = \mathit{101},$$
$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 = \mathit{110},$$
$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 = \mathit{111}, \ldots$$

y así uno podía continuar indefinidamente. Los sabios binarios (SBI) indagaron sobre ciertas propiedades y descubrieron, por ejemplo, que sumar el doble de una cierta suma de unos consistía en añadir un cero al final de la expresión inicial

$$(1 + 1) + (1 + 1) = \mathit{10}\boldsymbol{0}$$
$$(1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1) = \mathit{100}\boldsymbol{0}$$
$$(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) =$$
$$= \mathit{1000}\boldsymbol{0}, \ldots$$

pero si en estas expresiones se restaba una unidad, entonces se obtenía

$$(1 + 1) + (1 + 0) = \mathit{11}$$
$$(1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 0) = \mathit{111}$$
$$(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) =$$
$$= \mathit{1111}, \ldots$$

Estudiaron también las distintas operaciones que se podían realizar con los números binarios, como por ejemplo:

Suma	*Resta*	*Multiplicación*	*Potencia*
$\begin{array}{r} 10110 \\ +\ 11011 \\ \hline 110001 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1011 \\ -\ 101 \\ \hline 110 \end{array}$	$\begin{array}{r} 101 \\ \times\ 11 \\ \hline 101 \\ 101\ \\ \hline 1111 \end{array}$	$1011^2 = 1111001$ $101^3 = 1111101$ $11^4 = 1010001$ $10^5 = 100000$

Con el fin de comprobar que los estudiantes estaban bien preparados elaboraron extrañas pruebas con diferentes operaciones binarias (OBI) que los alumnos debían superar para obtener un hermoso diploma que llevaba la rúbrica del monarca.

Con el fin de comprobar que los estudiantes estaban bien preparados elaboraron extrañas pruebas con diferentes operaciones binarias (OBI) que los alumnos debían superar…

Por fin, llegó el día señalado del 1 de enero del 2001 fecha límite para, después de pasado el periodo transitorio de pruebas, hacer efectivo el nuevo sistema binario y el pueblo se engalanó de fiesta y salió a celebrarlo, pues todos estaban seguros de que el cambio les traería prosperidad y felicidad.

En la vecina república de Matemanía habían visto desde el principio con mucho recelo –y hasta se diría que con cierta sorna por parte de algunos sabios matemáticos (SMA)–, el nuevo sistema, revolucionario para ellos, pues estaban anclados en el tradicional y clásico sistema decimal y, evidentemente, despreciaban cualquier innovación.

Mientras tanto, en la escuela encantada de Hogwarts donde estudiaban los aprendices de magos había comenzado el segundo trimestre del curso, todos estaban muy ilusionados y contentos de verse después del corto periodo de descanso que habían pasado junto a sus familias y seres queridos.

El gran torneo matemático

En el castillo virtual de la ciudad de Cibergos, una de las siete ciudades virtuales del reino de Zamundo, se celebraba ese mismo año un torneo matemático al que fueron invitados los estudiantes más aventajados y aplicados de Infolandia y Matemanía. También como era tradición en el sistema cibermágico se había cursado una invitación –con una lechuza mensajera llamado Matfer–, al colegio encantado de Hogwarts donde estudiaban los futuros magos.

Tanto los SBI como los SMA se esmeraron por preparar a conciencia a los alumnos más dispuestos en la dura disciplina matemática. Había gran expectación por comprobar el comportamiento de los jóvenes de Infolandia, pues pensaban que habían perdido con el cambio y necesitaban un milagro para poder hacer algo. Los alumnos que estudiaban para magos también habían mostrado mucho interés en las clases de Arts Matemathica que impartía el maestro Xa Qin. El día previsto para la prueba se encontraron todos los participantes en el gran Salón Circular donde el Presidente del Gran Jurado abrió el sobre lacrado y leyó muy despacio y con gran solemnidad el enunciado del enigma que tenían que desentrañar[2]:

Una transformación de números naturales convierte al uno y a cualquier potencia de dos en el número uno, y si a un número natural n se le suma una potencia de dos mayor que dicho número, el transformado de la suma es una unidad mayor que el transformado del número n.

1.ª Si transformamos todos los números desde el uno hasta el 2001, ¿cuál

1 Los números escritos en el sistema binario aparecen en *cursiva* en el texto.

2. Propuesto en la XXXVII Olimpiada Matemática celebrada en Murcia:
Determinar la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (siendo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3\ldots\}$ el conjunto de los números naturales) que cumple, para cualesquiera s, n pertenecientes a $\mathbb{N}$, las siguientes condiciones:
$f(1) = f(2^s) = 1$ y si $n < 2^s$, entonces $f(2^s + n) = f(n) + 1$.
Calcular el valor máximo de $f(n)$ cuando n ″ 2001.
Hallar el menor número natural n tal que $f(n) = 2001$.

será el valor mayor de la transformación?

2.ª ¿Cuál será el valor del número más pequeño que se transforme en el número 2001?

Todos los participantes tomaron buena nota del enunciado del enigma y después de unos breves momentos iniciales de desconcierto y vacilación –en parte debido a lo extraño y asombroso que les pareció la comprensión del problema al que tenían que enfrentarse–, comenzaron por identificar los datos más relevantes, a planificar sus propias estrategias y a ponerlas en práctica para resolverlo.

Fueron bastantes los que consiguieron acertar con la solución correcta y llegaron a ella de muy diversas formas, el gran jurado tuvo que emplear mucho tiempo para decidir el fallo del concurso, pero al final de las arduas deliberaciones premió a los tres estudiantes que más destacaron por su originalidad, imaginación, claros razonamientos lógico-matemáticos, destreza en el cálculo, rapidez de reflejos en dar las respuestas válidas y también por el encanto lúdico-mágico de sus respuestas.

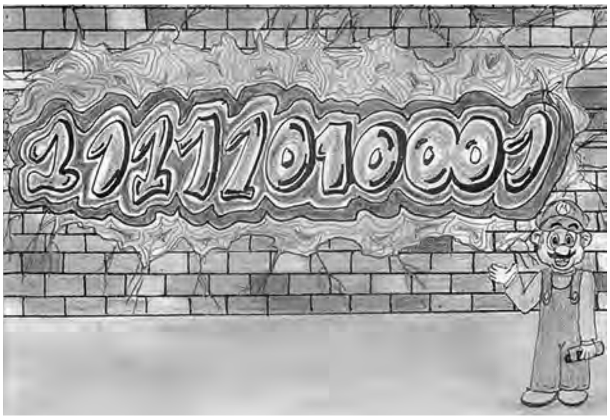
Las respuestas de los tres ganadores

El ganador de Infolandia fue Supermario –un alumno del distrito de Joystick–, para él fue como un juego de niños resolver el problema propuesto ya que dominaba como nadie *el difícil arte de operar con ceros y unos*. Antes de presentarse al concurso ya había destacado por su destreza –ostentaba el record de la mejor puntuación en el diploma OBI–, además su preparación por los SBI le dotó de valiosas herramientas de cálculo, estrategias heurísticas y una autoestima extraordinaria. Respondió de la siguiente forma al problema:

En binario la transformación es una función f que cumple:

$$f(1) = f(10) = f(100) = f(1000) = \\ = f(10\ldots0) = \ldots = 1$$

Todos los participantes tomaron buena nota del enunciado del enigma y después de unos breves momentos iniciales de desconcierto y vacilación –en parte debido a lo extraño y asombroso que les pareció la comprensión del problema al que tenían que enfrentarse–, comenzaron por identificar los datos más relevantes, a planificar sus propias estrategias y a ponerlas en práctica para resolverlo.



y, para cualquier otra expresión de unos y ceros, se tiene lo siguiente:

$$f(1) = 1,\ f(11) = f(10 + 1) = f(1) + 1 = = 1 + 1 = 2,$$
$$f(111) = f(100 + 11) =$$
$$= f(11) + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$f(110110) = f(100000 + 10110) = f(10110) + 1 =$$
$$= f(10000 + 110) +1 = f(110) + 2 =$$
$$= f(100 + 10) = f(10) + 3 = 1 + 3 = 4$$

La conclusión era trivial, para saber la transformación que experimentaba un número había que sumar los unos que aparecían en la expresión binaria de dicho número.

Como la expresión binaria de 2001 es: *11111010001*, existen varios números anteriores y con más cifras de unos. Las soluciones vienen dadas por los números:

1111111111 (1023); *10111111111* (1535);
11011111111 (1791); *11101111111* (1919);
11110111111 (1983)

Al aplicar la función f a cualquier número nos queda:

$$f(10111111111) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10$$

Es decir, sumamos diez unos y este es el valor máximo.

Para contestar a la segunda pregunta escribió lo siguiente, el número n viene dado en binario por:

$$n = 111111111\ldots11111111$$

Es decir, poner una pila de 2001 unos.

La segunda premiada Lara Croft participaba por la república de Matemanía y era alumna del distrito 007. Sin tener licencia del MAPLE V –programa informático que había pirateado de la red de sus vecinos de Infolandia–, lo había utilizado para la resolución del problema. En sus manos constituía un arma letal para hacer frente a los increíbles cálculos que tuvo que realizar para terminar con el endiablado y enrevesado problema. Estos fueron los siguientes:

Es sabido que cualquier número natural se puede expresar –de forma única–, como suma de potencias distintas de base 2. Otra propiedad interesante de las potencias del número 2 es que cualquier potencia de 2 es una unidad mayor que la suma de todas las potencias anteriores a ella, como por ejemplo:

$$2^{10} = 1024 > 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 1023;$$

por lo que se determinan los números menores que 2001 que se pueden poner como suma de potencias distintas de 2 y con la mayor cantidad de sumandos. Tenemos que:

$$1023 = 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$$1535 = 2^{10} + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 1024 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$$1791 = 2^{10} + 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 1024 + 512 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$$1919 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 1024 + 512 + 256 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$$1983 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

Como cada número de los anteriores se puede expresar como la suma de diez potencias distintas de 2, y como la suma de las potencias de dos consecutivas desde 2^0 a 2^{10} vale $2^{11} – 1 = 2047 > 2001$, la respuesta es 10. Si se aplica a cualquiera de los números indicados la función transformadora f se tiene:

$$f(1023) = f(2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0) =$$
$$= f(2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0) + 1 =$$
$$= f(2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0) + 2 =$$
$$= f(2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0) + 3 = .. = f(2^0) +9 = 10.$$

Claramente esto mismo ocurriría con los demás números, luego el valor máximo que toma la función es 10 en esos cinco números.

El tercer ganador, Harry Potter, participaba por Gryffindor de la escuela de aprendices para brujos del colegio Hogwarts. Las dificultades que encontró para resolver el enigma estuvieron a punto de hacerle abandonar, pero su perseverancia no conocía límites.

Por otra parte, el valor más pequeño de n que cumple $f(n) = 2001$ viene dado por:

$$n = 2^{2000} + 2^{1999} + 2^{1998} + 2^{1997} + 2^{1996} + 2^{1995} + \dots + 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

Con el ordenador portátil, ejecutó el programa y tecleó la sentencia:

```
[ > sum (2^k , k = 0 . . 2000);

2296261390548509048465666402355363968044635404177390400955
2854736515325227847406277133189726330125398368919292779749
2554689423792172611066285186271233330637078259978290624560
0013775582964800897428578539801269724895632309272927767278
9463405208093270794180999311632479761788925921124662329907
2328443940665362688337817968917011204758969615828117801869
5530008580054334132516610440162644725625835225357666344131
9799079283625404355971680808431970636650308177886780418384
1109915567179344078320163914433261165510760851167452031056
6975728388641090178305515677652503508710576016456855416359
30907524369702298058751
```

Como la respuesta era muy larga, buscó otra expresión para sumar:

```
[ > sum (2^k , k = 0 . . n);

2^(n + 1) – 1
```

Tenía la fórmula algebraica adecuada, luego la respuesta siendo $n = 2000$ era obvia, $2^{2001} – 1$.

El tercer ganador, Harry Potter, participaba por Gryffindor de la escuela de aprendices para brujos del colegio Hogwarts. Las dificultades que encontró para resolver el enigma estuvieron a punto de hacerle abandonar, pero su perseverancia no conocía límites. Aunque llevaba varios años estudiando la dura disciplina con el maestro Xa

Qin, nunca se le había dado la materia tan bien como a su amiga Hermione.

Comenzó probando varios conjuros mágicos, el primero que intentó fue *Principia Pythagórica*, pero la varita mágica después de dibujar un extraño triángulo en el aire, se quedó inmóvil. Lo volvió a intentar con otros muchos principios: *Principia Diophanto, Principia Thales…,* pero la varita seguía muda, sin resolver el misterioso enigma de la transformación de números naturales, por lo que su desesperación iba en aumento. Comenzaba a sentirse triste, abatido, con ganas de olvidarse de esta pesadilla que le recordaba aquella otra en la que siendo niño había sobrevivido a un enfrentamiento con las fuerzas tenebrosas de las Artes Ocultas.

Después de un momento de vacilación se repuso y una luz brilló en su interior, recordó las enseñanzas de su gran maestro y pronunció las palabras mágicas *Principia Inductionis…* y al instante un espectacular fogonazo surgió de su varita mágica y al ritmo de una melodía maravillosa empezaron a chisporrotear de su extremo una lluvia de estrellas que se iban a posar suavemente en los peldaños de una escalera gigante que iba emergiendo poco a poco desde el suelo.

Sin perder la calma, recordó que la primera prueba consistía en conocer el valor máximo de la transformación hasta el numero 2001, por lo que sin tiempo de pensar y casi de forma instintiva dijo: «Principia Inductionis 2001». Las estrellas cesaron de improviso y sin saber muy bien lo que había sucedido se acercó a la escalera. Todas las estrellas tenían escrito en su interior un número, en el primer peldaño y perfectamente ordenadas estaban las estrellas con los números 1, 2, 4, 8, …, 1024; miró en el segundo peldaño y observó que los números de las estrellas eran 3, 5, 9, …, 1536; siguió subiendo peldaño a peldaño hasta llegar al último que contenía estrellas y que precisamente era el décimo, en él pudo ver que se encontraban las estrellas numeradas con 1023, 1535, 1791, 1919 y 1983. Comprobó que estaban todos los números del 1 al 2001, y entonces comprendió la respuesta al enigma que le había proporcionado las palabras mágicas:

Todos los números que se podían poner como una única potencia de dos se colocaban en el primer peldaño de la escalera, $1= 2^0$, $2= 2^1$, $4= 2^2$, $8= 2^3$, …, $1024= 2^{10}$; los que se expresaban como suma de dos potencias de dos distintas en el segundo, $3 = 2^0 + 2^1$, $5 = 2^0 + 2^2$, $9 = 2^0 + 2^3$, $1536 = 2^9 + 2^{10}$; y así sucesivamente hasta llegar al último peldaño *el décimo* en el que aparecían los cinco números que se podían poner como suma de diez potencias de 2:

$1023 = 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$,

$1535 = 2^{10} + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$,

$1791 = 2^{10} + 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$,

$1919 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$,

$1983 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

La llave que había resuelto la transformación era el *Principio de Inducción*, que se aplicaba sobre el número de sumandos que aparecía en la descomposición en potencias de dos de cualquier número natuaral. Como había visto, el 1 y todos los números que eran potencias de dos se colocaban en el primer peldaño, y si un número se podía poner como la suma de n potencias de dos, todas distintas, es decir, $N = 2^{k1} + 2^{k2} + 2^{k3} + \ldots +2^{kn}$, siendo $k1 > k2 > k3 > \ldots > kn$ números natuales, como el número $N' = 2^{k2} + 2^{k3} + \ldots +2^{kn} < N$, ya estaba situado en el peldaño $(n – 1)$, al añadirle 2^{k1}, que curiosamente era mayor que N' y por la propiedad mágica de la transformación pasaba al pendaño siguiente n.

Ahora era evidente, ¡sí, claro!, pero le había costado un enorme esfuerzo averiguarlo. Ya había contestado a la primera prueba, la respuesta era diez, pero, ¿qué haría para resolver la segunda prueba?

Se encontraba cansado, mareado, con la cabeza que le daba vueltas de puro agotamiento, pero haciendo un último esfuerzo y después de pasar un buen rato pensando, apretó firmemente la varita mágica hecha de acebo y pluma de fénix y dijo para completar de colocar a los números naturales que faltaban: «Principia

Después de un momento de vacilación se repuso y una luz brilló en su interior, recordó las enseñanzas de su gran maestro y pronunció las palabras mágicas Principia Inductionis…

Inductionis Completa». Nuevamente ésta cobró vida y de su extremo comenzaron a surgir estrellas, la primera que tenía el número capicúa $2002 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^1$ se fue a colocar en el peldaño que le correspondía –el séptimo–, junto a $2001 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^0$; a continuación surgió el 2003 –que tenía la asombrosa propiedad de ser un número primo–, y se colocó en el peldaño octavo ya que $2003 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^1 + 2^0$ y así al ritmo de una mágica melodía y a una velocidad de vértigo –cercana a la luz–, se iban a posar sobre los peldaños de la escalera que crecía, crecía en anchura y en altura y empezaba ya a perderse de vista en el cielo infinito.

Con renovados ánimos, y sin pensarlo dos veces, montó en su escoba mágica –con la que jugaba de buscador al juego de quidditch–, y subió velozmente hasta el peldaño numerado 2001; allí estaban ordenadas secuencialmente las estrellas que habían ido a parar a ese escalón. Pero, ¡oh cielos!, la primera era una estrella enorme, supergigante, mucho más grande que las que ocupaban la posición inicial en los primeros peldaños y no se atrevía a cogerla por miedo a perder el equilibrio y caer de la escoba mágica desde esa gran altura. Estuvo dudando un momento y recordó que las primeras que habían aparecido en los diez primeros escalones eran las numeradas por 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511 y 1023, les fataba una unidad para ser potencia perfecta de 2. Como último recurso sumó una unidad al número que figuraba en la estrella y pronunció las palabras mágicas «Reductio Potentia»; en un instante la gigantesca estrella se convirtió en una estrella tan pequeña que le cabía perfectamente en el bolsillo de su pantalón, y al mirarla observó que en ella aparecía la expresión: 2^{2001}, entonces le restó uno y ya tenía la respuesta a la segunda pregunta del enigma: $2^{2001} - 1$, que coincidía con la suma de $2^{2000} + 2^{1999} + 2^{1998} + \ldots + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$. Rápidamente la guardó y bajó a toda prisa para entregársela al gran jurado.

Los premios

El gran jurado otorgó a cada uno de los tres ganadores una medalla de oro olímpica y a su regreso a sus respectivos países, Supermario fue recibido por el soberano Bin*01* que le concedió una beca para estudiar matemáticas y convertirse en un gran SBI; Lara Croft recibió como premio de los sabios SMA un programa de MATLAB (MATrix LABoratory) –ahora con licencia–, para poder resolver con rapidez todos los problemas matemáticos que se le cruzasen por el camino; y Harry Potter recibió de su maestro Xa Qin la gran enciclopedia matemática *Sigma* (Σ), que contenía un compendio de los saberes matemáticos que se habían recopilado en el último milenio.

Como último recurso sumó una unidad al número que figuraba en la estrella y pronunció las palabras mágicas «Reductio Potentia»…

Joaquín Aguilar
IES Cardenal López de Mendoza. Burgos.
Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas

Tenía una nota de felicitación del director del colegio en la que aparecía escrita una bonita poesía de un gran sabio que había vivido en Siora –una de las ciudades virtuales del reino de Zamundo–:

Leer, leer, leer, vivir la vida
que otros soñaron.
Leer, leer, leer, el alma olvida
las cosas que pasaron.
Se quedan las que quedan, las ficciones,
las flores de la pluma,
las olas, las humanas creaciones,
el poso de la espuma.
Leer, leer, leer, ¿seré lectura
mañana también yo?
¿Seré mi creador, mi criatura,
seré lo que pasó?

A. Machado

SUMA 42
febrero 2003, pp. 97-99

El Cálculo diferencial y el problema isoperimétrico

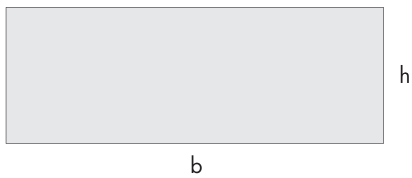
Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

HEMOS DEJADO PARA EL FINAL aquella resolución por la que comienza la mayoría del profesorado de Matemáticas: la basada en el uso del Cálculo Diferencial. Siempre que hemos propuesto el problema que planteábamos en la primera entrega en algún curso o seminario, la forma de abordarlo ha sido echando mano de las derivadas para la búsqueda de extremos de determinada función área. Como se habla de enmarcar un cuadro de 3 m de perímetro, siempre han comenzado pensando en formas rectangulares, por lo que el problema que se planteaban solía ser el siguiente:

> Entre todos los rectángulos de igual perímetro *P*, el cuadrado de lado *P*/4 es el que encierra la mayor área.

Y la forma de abordar la solución era, más o menos, como sigue.



Si denominamos b y h a las dimensiones del rectángulo, puesto que el perímetro es P, será $P = 2b + 2h$. Su área en función de b será:

$$b\left(\frac{P-2b}{2}\right) = P\frac{b}{2} - b^2$$

Consideramos entonces la función real de variable real:

$$A(b) = P\frac{b}{2} - b^2 \qquad b \in [0, P/2]$$

Puesto que $A'(b) = P/2 - 2b$, $A'(b) = 0$ si y sólo si $b = P/4$. Además $A''(P/4) < 0$, luego para $b = P/4$, la función tiene un máximo local.

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

De hecho es un máximo global de la función $A(b)$, ya que éste o se alcanza en los extremos del intervalo o en su interior, pero en los extremos hay valores mínimos:

$$A(0) = 0; \qquad A\left(\frac{P}{2}\right) = 0; \qquad A\left(\frac{P}{3}\right) = \frac{P^2}{18}$$

Si $b = P/4$, entonces $h = P/4$; es decir, el rectángulo de mayor área, entre los de un mismo perímetro P, es el cuadrado de lado $P/4$.

Bien, ya hay una solución. Rápidamente se piensa en que es el círculo de longitud P el que mayor área encierra. Sin embargo, la prueba correspondiente al crecimiento del área para polígonos regulares a medida que aumenta el número de lados no es inmediata. Esta será nuestra, por ahora, última resolución parcial del problema y despediremos al actual equipo director de SUMA haciendo las reflexiones finales y, tal y como anunciamos en su día, planteando el enunciado actual sobre el que se sigue buscando solución.

Comencemos por el caso más sencillo: el polígono regular de menor número de lados.

> Entre todos los triángulos de igual perímetro P, el triángulo equilátero de lado $P/3$ es el que encierra mayor área.

Recordando la fórmula de Herón, el área de un triángulo de lados a, b y c es:

$$\sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-a\right)\left(\frac{P}{2}-b\right)\left(\frac{P}{2}-c\right)}$$

donde P es el perímetro de dicho triángulo.

Como $c < a + b = P - c$, entonces $2c < P$ y por tanto $c < P/2$. Análogamente podemos ver que $b < P/2$ y que $a < P/2$.

Para resolver el problema planteado, deberíamos encontrar el máximo de la función:

$$g_1(a,b,c) = \sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-a\right)\left(\frac{P}{2}-b\right)\left(\frac{P}{2}-c\right)}$$
$$\text{con } (a,b,c) \in \left[0,\frac{P}{2}\right]\times\left[0,\frac{P}{2}\right]\times\left[0,\frac{P}{2}\right]$$

con la ligadura $P = a + b + c$. Observamos que maximizar g_1 es equivalente a maximizar:

$$g_2(a,b,c) = \frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-a\right)\left(\frac{P}{2}-b\right)\left(\frac{P}{2}-c\right)$$

Calcularemos entonces los extremos de la función:

$$g_1(a,b,c) = \frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-a\right)\left(\frac{P}{2}-b\right)\left(\frac{P}{2}-c\right)$$
$$\text{con } (a,b,c) \in \left[0,\frac{P}{2}\right]\times\left[0,\frac{P}{2}\right]\times\left[0,\frac{P}{2}\right]$$

con la ligadura $P = a + b + c$.

Introduciendo la ligadura en la función a optimizar, puesto que $a = P - b - c$, se tratará de calcular el máximo de la función de dos variables:

$$g(b,c) = \frac{P}{2}\left(-\frac{P}{2}+b+c\right)\left(\frac{P}{2}-b\right)\left(\frac{P}{2}-c\right)$$
$$\text{con } (b,c) \in \left[0,\frac{P}{2}\right]\times\left[0,\frac{P}{2}\right]$$

La existencia del valor máximo de la función g está asegurada por el teorema de Weierstrass ya que g es una función continua en un conjunto compacto del plano.

Analizaremos los puntos críticos interiores del dominio de la función y posteriormente los de la frontera.

Empezamos pues, buscando los puntos críticos de la función g en $(0,P/2) \times (0,P/2)$. Como:

$$\frac{\partial g}{\partial b}(b,c) = \frac{P(2b+c-P)(2c-P)}{4}$$
$$\frac{\partial g}{\partial c}(b,c) = \frac{P(b+2c-P)(2b-P)}{4}$$

y en consecuencia el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{db}(b.c) = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial g}{dc}(b.c) = 0 \end{cases}$$

tiene como únicas soluciones los pares $(0, P/2)$, $(P/3, P/3)$, $(P/2, 0)$ ó $(P/2, P/2)$.

En consecuencia el único punto crítico de la función g en $(0, P/2) \times (0, P/2)$ es $(P/3, P/3)$.

La frontera de $(b, c) \in [0, P/2] \times [0, P/2]$ está formada por los cuatro segmentos: $b = 0$ con $0 \le c \le P/2$, $b = P/2$ con $0 \le c \le P/2$, $c = 0$ con $0 \le b \le P/2$, $c = P/2$ con $0 \le b \le P/2$.

Así el estudio de los puntos donde las funciones reales de una variable real siguientes alcanzan sus extremos:

$$t_1(c) = g(0,c) = -\frac{P^2}{4}\left(\frac{P}{2}-c\right)^2 \qquad \text{si } 0 \le c \le P/2$$
$$t_2(c) = g\left(\frac{P}{2},0\right) = 0 \qquad \text{si } 0 \le c \le P/2$$
$$t_3(b) = g(b,0) = -\frac{P^2}{4}\left(\frac{P}{2}-b\right)^2 \qquad \text{si } 0 \le b \le P/2$$
$$t_4(b) = g\left(b,\frac{P}{2}\right) = 0 \qquad \text{si } 0 \le b \le P/2$$

nos llevará considerar los puntos $(0, 0)$, $(0, P/2)$, $(P/2, 0)$ y $(P/2, P/2)$. teniendo en cuenta que:

$$g(0,0) = -\frac{P^4}{16}; \qquad g\left(0,\frac{P}{2}\right) = 0; \qquad g\left(\frac{P}{2},0\right) = 0$$
$$g\left(\frac{P}{2},\frac{P}{2}\right) = 0; \qquad g\left(\frac{P}{3},\frac{P}{3}\right) = \frac{P^4}{432}$$

el máximo absoluto de la función g será:

$$\frac{P^4}{432}$$

obtenido para $b = P/3$ y $c = P/3$. En consecuencia será $a = P - P/3 - P/3 = P/3$.

Por tanto el triángulo de perímetro P de área máxima será el triángulo equilátero de lados $P/3$.

> ¿Qué relación existe entre las áreas de dos polígonos regulares con distintos lados e igual perímetro P?

Según vimos en el número 37 de SUMA, el área de un polígono regular de n lados y perímetro P es:

$$\frac{P^2}{4n\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$$

Consideramos la función real de variable real:

$$g(x) = \frac{P^2}{4x\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{x}} \qquad \text{con } x \in [3, \infty)$$

que es continua y derivable. Veamos que la función g es creciente en $[3, \infty)$. Para ello comprobaremos que $g'(x) > 0$ si $x \in [3, \infty)$:

$$g'(x) = -\frac{P^2\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}}{4x^2} + \frac{P^2\pi\cdot \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{x}}{4x^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{x} + \pi\cdot \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x\cdot \cos\frac{\pi}{x}\cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} + \pi = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{x}\cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{x} = \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\frac{2\pi}{x} = \frac{2\pi}{x}$$

Veamos ahora que no existe $x \in [3, \infty)$ que satisfaga la última ecuación. Para ello consideramos la función:

$$n(x) = \frac{2\pi}{x} - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{x} \qquad \text{para } x \in [3, \infty)$$

Derivando tenemos:

$$n'(x) = -\frac{2\pi}{x^2} + \frac{2\pi\cdot \cos\frac{2\pi}{x}}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-1 + \cos\frac{2\pi}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{x} = 2\pi m \qquad \text{con } m \text{ entero}$$

es decir si $x = 1/m$, siendo m un entero no nulo. Como esto no puede ocurrir, tenemos que $n'(x) \neq 0$ para $x \in [3, \infty)$. Puesto que n es continua y derivable en $[3, \infty)$ n será decreciente o creciente.

Como:

$$\lim_{x\to 3} n(x) = \frac{1}{6}(-3\sqrt{3} + 4\pi) > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} n(x) = 0$$

la función n será decreciente en $[3, \infty)$ y además:

$$n(x) = \frac{2\pi}{x} - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{x} > 0 \qquad \text{para } x \in [3, \infty)$$

En consecuencia $g'(x) \neq 0$ para $x \in [3, \infty)$, y por tanto la función continua y derivable g será creciente o decreciente en $[3, \infty)$.

Como:

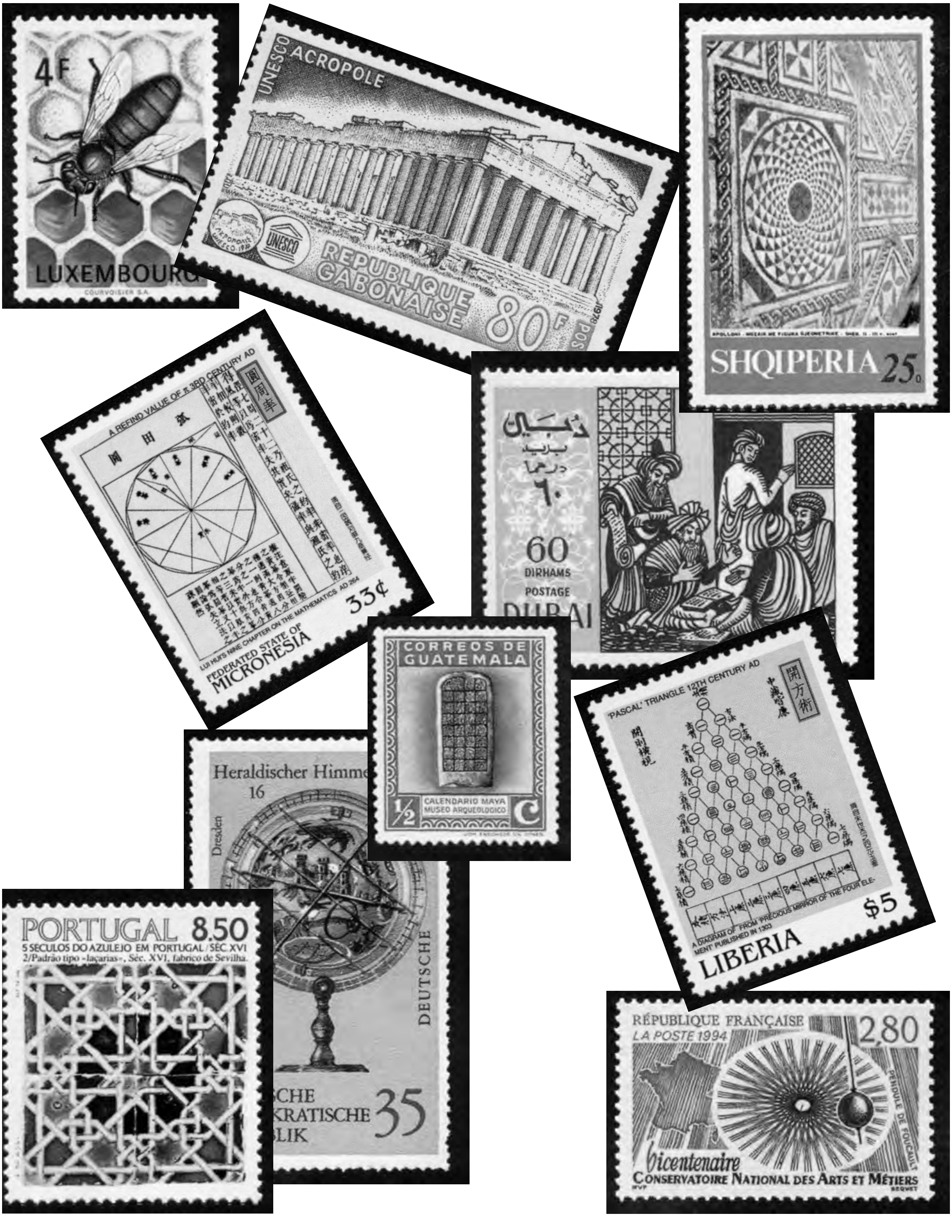
$$\lim_{x\to 3} g(x) = \frac{P^2}{12\sqrt{3}}, \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{P^2}{4\pi}$$

y

$$\frac{P^2}{12\sqrt{3}} < \frac{P^2}{4\pi}$$

la función g será creciente en $[3, \infty)$.

En consecuencia si $n_1 < n_2$ son dos números naturales, entonces $g(n_1) < g(n_2)$, es decir el área del polígono regular de perímetro P con n_1 lados es menor que el del polígono regular de perímetro P con n_2 lados.


4F
LUXEMBOURG
COURVOISIER S.A.
UNESCO ACROPOLE
UNESCO
REPUBLIQUE GABONAISE
80F
SHQIPERIA
25q
A REFIND VALUE OF π 3RD CENTURY AD
LUI HUI'S NINE CHAPTER ON THE MATHEMATICS AD 264
FEDERATED STATE OF MICRONESIA
33¢
60
DIRHAMS
POSTAGE
DUBAI
CORREOS DE GUATEMALA
CALENDARIO MAYA
MUSEO ARQUEOLOGICO
½
C
'PASCAL' TRIANGLE 12TH CENTURY AD
A DIAGRAM OF FROM PRECIOUS MIRROR OF THE FOUR ELEMENT PUBLISHED IN 1303
LIBERIA
$5
Heraldischer Himme
16
Dresden
DEUTSCHE
35
PORTUGAL
8.50
5 SECULOS DO AZULEJO EM PORTUGAL / SÉC. XVI
2/Padrão tipo «laçarias», Séc. XVI, fabrico de Sevilha.
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
LA POSTE 1994
2,80
PENDULE DE FOUCAULT
bicentenaire
CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS

SUMA 42
febrero 2003, pp. 101-103

Comparar medios

Fernando Corbalán

MATES Y MEDIOS

POR QUÉ COMPRAMOS un periódico y no otro? ¿Cuál es la razón de que veamos más esta cadena de televisión que la otra? ¿Y por qué tenemos presintonizadas algunas emisoras de radio? Seguro que todos tenemos alguna respuesta a esas preguntas, aunque lo más fácil es que sean genéricas en la mayoría de los casos y en bastantes tengan que ver con alguna opción política. Pero puede ser que nuestros alumnos y alumnas tengan unas opciones «heredadas» de la familia (hasta que toman posesión del mando a distancia al menos) o no sean capaces de cuantificarlas de ninguna manera.

Tanto para unos como para otros, pero sobre todo en el caso de los más jóvenes, puede ser de interés tener modelos para comparar los medios, para así poder decir de forma cuantificada las razones de nuestros gustos. Y para poner de manifiesto que una de las tareas fundamentales de las matemáticas es proporcionar modelos para analizar la realidad (de los medios de comunicación en este caso). No vamos a dar un modelo cerrado de protocolo para comparar medios (lo que sería una plantilla del tipo de las que utilizan las empresas de encuestas), sino algunos aspectos relevantes (o al menos que se pueden tener tener en cuenta) para que cada uno, a partir de ese menú, y añadiendo otros ingredientes, si los echa en falta, pueda confeccionar su propio instrumento de análisis. Nos limitaremos a la prensa y la televisión.

Periódicos

Vamos a ir citando una serie de apartados que se pueden considerar, haciendo además comentarios relativos a otras posibles utilizaciones pedagógicas de los mismos (marcadas con el símbolo ∅).

- Tamaño del periódico. Primer aspecto que se percibe. En nuestro país tienden todos al tamaño tabloide, con desplazamientos hacia la media de los más alejados (como podrían ser *ABC* creciendo y el anterior formato de *Heraldo de Aragón* menguando). Pero, ¿también son así en otros países? Desde luego que no. Sería interesante una investigación al respecto, al menos en los países cercanos a nosotros, y que se puede realizar con más facilidad con el auxilio de Internet.

- ∅ También se puede tomar la superficie del periódico como unidad para medir superficies (resaltando con esa unidad inusual que medir es comparar). / Investigar a partir de sus dimensiones cómo tienen que ser las bobinas de papel a partir de las que se edita. / Ver si sólo se puede tirar el periódico de una forma o hay varias/...

- Tamaño relativo de titulares y texto. Constatar que algunos periódicos son «todo titulares» y otros sólo tienen «letra», y entre ambos hay todos los posicionamientos posibles. ¿Da lo mismo o hay preferencias?

  ∅ Tratar de la importancia relativa de cada parte en una superficie.

- Fracciones periódicas (o porcentajes periódicos si se opta por el procedimiento habitual en los medios), que poco tienen que ver con el concepto ya acuñado por los egipcios, y que quieren indicar una forma de medir en los periódicos diferentes aspectos: páginas con publicidad, con fotos o gráficos, de servicios (cartelera, museos, actos…), etc., o cualquier aspecto que se considere interesante.

  ∅ Se puede aprovechar para realizar las equivalencias entre fracciones y porcentajes, tan necesarias como poco interiorizadas (¡con tantos algoritmos como se llega a automatizar en la enseñanza!).

- Unas fracciones periódicas especialmente importantes son las que cuantifican cada una de las posibles secciones (política, internacional, cultura, economía, deportes…), que son un buen elemento para comparar la importancia relativa que se les da a cada tema.

  ∅ Quizás este apartado permitiría distinguir entre los llamados periódicos «nacionales», «regionales» y «locales» (con terminología todavía sin adaptar al estado de las autonomías). Y tal vez se aprecie que en bastantes se cumple una especie de ley no escrita de las redacciones: los periodistas que «mandan» son los de deportes.

- Número de suplementos semanales. Cuyo aumento nos indica que los periódicos han cambiado su «papel» (han pasado de dar las noticias –que ahora proporcionan la radio o la televisión– a comentarlas), adecuándose a la cambiante realidad.

  ∅ Eso nos debería hacer pensar en si los enseñantes también nos tomamos en serio el proceso de «reconversión», puesto que la mayoría de la información que tienen que procesar nuestros alumnos no se la proporcionamos en el sistema educativo.

- Cantidad y contenido de los suplementos en color. Que puede hacernos detectar un proceso de disputa del territorio a las revistas del corazón, verdadero fenómeno nacional (y hasta producto de exportación) y que al no estar en los periódicos hacen que bordeemos la frontera del subdesarrollo en el consumo de periódicos (10 por cada 1000 habitantes según la UNESCO).

  ∅ Un ejercicio interesante es comparar en ellos el porcentaje dedicado a publicidad en diferentes épocas del año (en Navidad parece que los artículos son la excusa para poder editar un folleto publicitario)./ También es posible comparar con las tiradas de los periódicos en otros países de nuestro entorno y ver el tipo de los de mayor tirada.

Además de todo lo anterior, por supuesto que se eligen periódicos por su adscripción ideológica (o política) y según se prefiere lo cercano o lo lejano, continuar con los periódicos de siempre (si no han desaparecido) o variar…

Y no hay que olvidar, sobre todo en clase de matemáticas, los periódicos deportivos, correlato «masculino» de la prensa del corazón y (casi) los únicos periódicos que alguna vez, tras un evento destacado, se ven por las clases. Porque además de ser de gran interés para el alumnado (también femenino cada vez más) son una fuente de interesantes matemáticas, sobre todo de estadística y gráficos, que aparecen con profusión en sus páginas.

Televisión

La televisión es de todos los medios el de mayor interés para nuestros estudiantes; no sé si también para el profesorado. Aunque para «nosotros» (los profes) no suele ser el medio de estudio preferido, porque en la prensa nos sentimos más «superiores» (quizás porque su análisis es más parecido a la práctica escolar habitual).

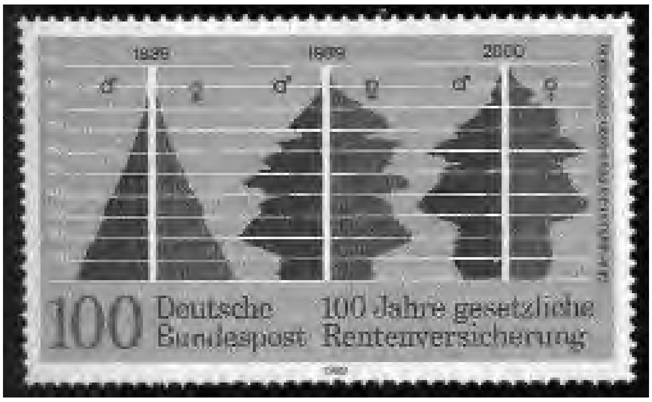
Es un medio muy vivo y en permanente cambio y acomodación a las «necesidades» del consumidor (o creando nuevas para correr a llenarlas), de forma que en pocos años se ha pasado de una sola televisión a varias generalistas y después (por parabólica aislada o de plataformas o por cable) a una oferta tan desaforada de canales con un tema único («temáticos») que el problema es, por un lado, enterarse de la oferta y, por otro, tener tiempo para poder ver lo que interesa. Un asunto curioso es constatar que cuando sólo había una cadena nos quejábamos de su calidad..., y lo mismo sigue pasando ahora que hay muchas. Una muestra más de que la cantidad no es sinónimo de avance.

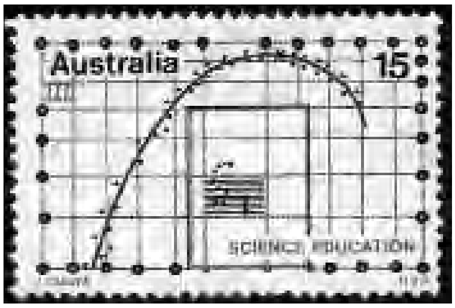
Si nos limitamos a las cadenas generalistas (intentar comparar las otras es un intento vano) se pueden utilizar unas fracciones del mismo tipo que en la prensa (aquí serían televisivas) aunque en este caso las secciones que habría que comparar serían diferentes (noticias, documentales, series de ficción, películas, deportes…), con una atención especial al tiempo dedicado a publicidad (y los subterfugios para encubrirla). Para calcularlas se pueden utilizar las programaciones que aparecen en los periódicos (con lo que matamos dos medios de un tiro), pero hay una forma de hacer comparaciones inmediatas (algo que las nuevas generaciones aprecian tanto) y que nuestros alumnos y alumnas ya conocen de sobras: el «zapping».

Con su práctica sistemática se puede ver lo iguales que acaban siendo en una primera aproximación todas las cadenas (parece que todas se ponen de acuerdo en emitir anuncios a la misma hora) pero que quizás no lo son tanto si se profundiza más. Y para eso sirven los modelos, para poder aportar datos de las diferencias. Como estos temas cambian es cuestión de investigar los intereses de los alumnos y alumnas y diseñar los temas tratados y tipos de programas que se pueden estudiar (concursos y tipos de los mismos; series para adolescentos o mayores; programas de música joven…).

Final

Y para acabar, creo que es conveniente aprovechar cualquier aproximación a los medios para propiciar que nuestros estudianters vean que las diferentes partes de las matemáticas (números de distinto tipo, funciones y gráficas, geometría, estadística…) tienen una presencia importante en ellos. Que constaten, en definitiva, que las matemáticas son importantes fuera del aula, en la vida.





CONVOCATORIA DEL CARGO DE SECRETARIO/A GENERAL DE LA FESPM

El Estatuto de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) establece, en su artículo 11, los cargos unipersonales, entre los cuales se contempla la secretaría general, cuyas funciones están recogidas en el artículo 21 del citado estatuto. A su vez, el Reglamento de la FESPM especifica en el artículo 8 los requisitos exigidos para este cargo, así como el procedimiento de elección.

La Junta de Gobierno de la FESPM, en la reunión celebrada en Madrid el día 8 de febrero de 2003, ha decidido convocar la Secretaría General en los siguientes términos:

Podrá ser candidato a la Secretaría General cualquier Socio de una Sociedad Federa-da, con una antigüedad mínima de dos años.

La solicitud dirigida a la Presidencia de la Federación, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

a) Certificado en el que conste su condición de Socio activo de una Sociedad Federada y su antigüedad.

b) Una memoria de un máximo de tres folios, a doble espacio y por una cara, en la que exponga su posible programa de actuación al frente de la Secretaría General

Las candidaturas podrán presentarse de cualquiera de las formas siguientes, teniendo en cuenta los plazos que en cada caso se señalan:

A) Por correo postal, hasta el 20 de junio de 2003, dirigido a:

SR. PRESIDENTE DE LA FESPM

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas P. Sánchez Ciruelo

ICE Universidad de Zaragoza

C/ Pedro Cerbuna, 12 – 50009 - Zaragoza

B) Por correo electrónico hasta el 22 de junio de 2003. En tal caso el mensaje se dirigirá a: fvillarroya@able.es

La Junta de Gobierno de la FESPM elegirá al Secretario/a General, para un periodo de 4 años, entre los/as candidatos/as presentados/as en su reunión del día 3 de julio de 2003. Previamente a la elec-ción, la Junta de Gobierno oirá a la Sociedad a la que pertenezca cada uno de los/as can-didatos/as. Una vez decidida la elección se comunicará oficialmente a las Sociedades Federadas, y a la persona elegida.

Madrid, a 8 de febrero de 2003

José Luis Álvarez García

Secretario General

SUMA 42

febrero 2003, pp. 105-110

¿Quién tiene...? Yo tengo...

Grupo Alquerque*

ESTE JUEGO consta de 40 tarjetas, que en una de sus caras tienen una pregunta y en la otra una respuesta que no corresponde a la pregunta que le acompaña.

Reglas del juego

Se entrega una tarjeta a cada alumno de la clase. Si sobran tarjetas se reparten a criterio del profesor pues todas las tarjetas han de formar parte del juego. Se sigue la siguiente dinámica:

a) Un alumno, elegido al azar, lee la pregunta que figura en su tarjeta, comenzando por la frase "¿Quién tiene...?"

b) El alumno que posea en su tarjeta la respuesta a esa pregunta la lee en voz alta, comenzando con las palabras "Yo tengo..."

c) A continuación el alumno que ha respondido da la vuelta a su tarjeta y formula la pregunta que figura en ella.

d) El proceso se sigue hasta que se cierra el circuito, lo que sucede cuando responde a la última pregunta el alumno que lanzó la primera pregunta.

Puntualización

Si al terminar de cerrarse el circuito, quedasen tarjetas sin utilizar (algo más corriente de lo que parece) es debido a que en algún momento no se ha dado la respuesta correcta a la pregunta. Es aconsejable localizar donde ha ocurrido el fallo.

JUEGOS

* Los componentes del Grupo Alquerque de Sevilla son Juan Antonio Hans Martín (C.C. Santa María de los Reyes), José Muñoz Santonja (IES Macarena), Antonio Fernández-Aliseda Redondo (IES Camas), José Blanco García (IES Alcalá del Río) y Josefa M.ª Aldana Pérez (C.C. Inmaculado Corazón de María —Portacelli—).

Tarjetas

En el ejemplo que presentamos en las páginas que siguen, cada tarjeta tiene su anverso (donde figura una pregunta) y su reverso (con una respuesta), separados por una línea de puntos. Si las tarjetas parecen demasiado pequeñas, se puede hacer una fotocopia ampliándo la página hasta un A3. Cada hoja se corta por la mitad y cada una de las mitades se dobla por la línea de puntos central y de esa manera las dos caras quedan opuestas. A continuación se pegan y se recortan quedan formadas las tarjetas. Si estas dos partes se hacen por separado conviene pegarlas. En cualquier caso conviene plastificar las tarjetas una vez recortadas, lo que permite utilizarlas muchas veces.

Aclaraciones

Hemos presentado un juego de contenidos geométricos, pero es posible construir juegos equivalentes en cualquier otro bloque. La forma más fácil de construir las tarjetas es escribir una pregunta y en la tarjeta siguiente escribir la respuesta correspondiente, así hasta el final, en el que la respuesta a la pregunta de la última tarjeta se colocaría en la primera tarjeta.

El número de tarjetas puede ser el que se desee; basta hacer más o menos preguntas con sus respuestas.

El objetivo de la actividad es realizar un repaso rápido de los conceptos estudiados en un determinado bloque.

Como la realización de la actividad requiere poco tiempo, en una sesión de clase se puede jugar varias veces, barajando las tarjetas y repartiéndolas de nuevo, con lo que cada alumno tendrá que responder a preguntas distintas.

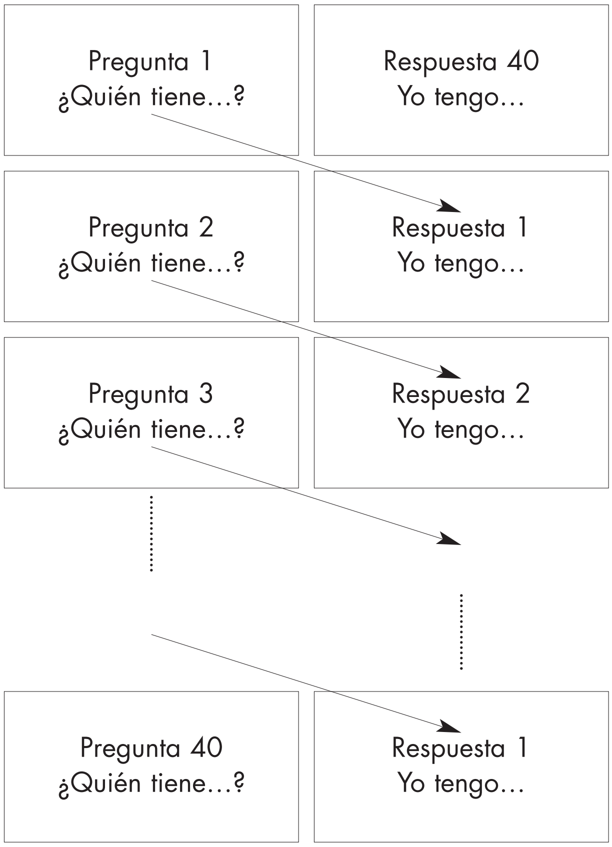
Es posible encontrar versiones de este juego para otros bloques en los libros reseñados en la bibliografía.

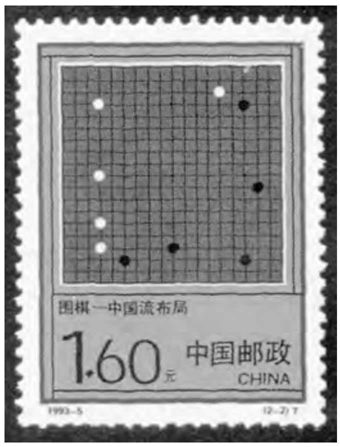
Bibliografía

GARCÍA AZCARATE, ANA (1999): *Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas. Números y álgebra*. Ediciones UAM, Madrid.

GRUPO AZARQUIEL: *En dos palabras*. Colección Matemáticas para Secundaria. Editorial S.M., Madrid.

GRUPO AZARQUIEL (1991): *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Colección matemáticas: cultura y aprendizaje. Ed. Síntesis, Madrid.



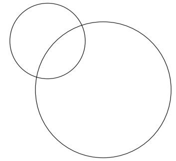


¿Quién tiene un sector circular?

Yo tengo:
Dos puntos

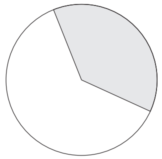
¿Quién tiene la intersección de dos rectas que se cortan?

Yo tengo:



¿Quién tiene una unidad de masa?

Yo tengo:



¿Quién tiene un hexaedro?

Yo tengo:
Un punto

¿Quién tiene una recta tangente a una circunferencia?

doblar por aquí

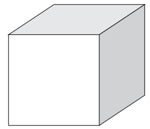
Yo tengo:
Un kilogramo

cortar por aquí

¿Quién tiene un radio?

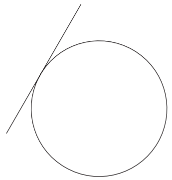
doblar por aquí

Yo tengo:



¿Quién tiene el valor de ≠?

Yo tengo:



¿Quién tiene un ángulo de 40°?

Yo tengo:
El segmento que une el centro con un punto de la circunferencia

¿Quién tiene dos circunferencias secantes?

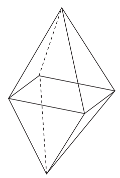
Yo tengo:
3,1415927

¿Quién tiene un octaedro?

Yo tengo:
Un ángulo agudo

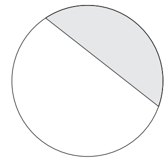
¿Quién tiene una curva cerrada y plana cuyos puntos están a la misma distancia de otro punto llamado centro?

Yo tengo:



¿Quién tiene un polígono de tres lados con un ángulo recto?

Yo tengo:



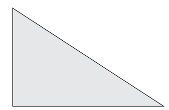
¿Quién tiene ángulos complementarios?

Yo tengo:

Una circunferencia

¿Quién tiene la longitud de la circunferencia?

Yo tengo:



¿Quién tiene el perímetro multiplicado por la apotema dividido por dos?

doblar por aquí

Yo tengo:

Dos ángulos que suman 90°

cortar por aquí

¿Quién tiene un cilindro?

doblar por aquí

Yo tengo:

$L = 2 \cdot \neq \cdot R$

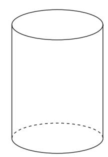
¿Quién tiene dos circunferencias tangentes interiores?

Yo tengo:

La fórmula para calcular el área de un polígono regular

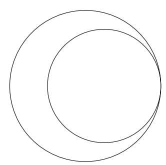
¿Quién tiene un ángulo recto?

Yo tengo:



¿Quién tiene un segmento circular?

Yo tengo:



¿Quién tiene la fórmula para calcular el área de un triángulo?

Yo tengo:

Un ángulo de 90°

¿Quién tiene
la unidad de longitud?

Yo tengo:
La base por la altura
dividido entre dos

¿Quién tiene un poliedro
formado por cuatro
triángulos equiláteros?

Yo tengo:
Un ángulo obtuso

¿Quién tiene dos ángulos
que suman 180°?

Yo tengo:
El metro

¿Quién tiene la recta
perpendicular a un
segmento que pasa
por su punto medio?

Yo tengo:
Un tetraedro

¿Quién tiene el segmento
que une el centro con el
punto medio de un lado de
un polígono regular?

Yo tengo:
Ángulos suplementarios

¿Quién tiene un poliedro
formado por veinte
triángulos equiláteros?

Yo tengo:
La mediatriz

¿Quién tiene el cuerpo de
revolución descrito por un
triángulo rectángulo que gira
sobre uno de sus catetos?

Yo tengo:
La apotema

¿Quién tiene
un prisma regular?

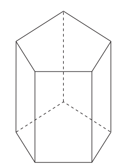
Yo tengo:
Un icosaedro

¿Quién tiene
un ángulo de 102°?

Yo tengo:
Un cono

¿Quién tiene
una corona circular?

Yo tengo:



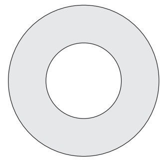
doblar por aquí

cortar por aquí

doblar por aquí

¿Quién tiene una región del espacio limitada por un número finito de polígonos?

Yo tengo:



¿Quién tiene la capacidad de un cubo de 1 dm de arista?

Yo tengo:
Un dodecaedro

¿Quién tiene la semirrecta que divide a un ángulo en dos partes iguales?

Yo tengo:
Un poliedro

¿Quién tiene la medida de un ángulo convexo?

Yo tengo:
Un litro

¿Quién tiene un cuerpo de revolución que se obtiene girando un semicirculo sobre su diámetro?

doblar por aquí

Yo tengo:
La bisectriz de un ángulo

cortar por aquí

¿Quién tiene una pirámide regular?

doblar por aquí

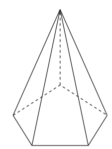
Yo tengo:
Un ángulo de 150°

¿Quién tiene la medida de un ángulo cóncavo?

Yo tengo:
Una esfera

¿Quién tiene un cuadrilátero con dos de sus cuatro lados paralelos?

Yo tengo:

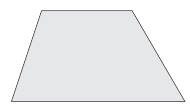


¿Quién tiene un poliedro formado por doce pentágonos regulares?

Yo tengo:
Un ángulo de 215°

¿Quién tiene los elementos necesarios para determinar una recta?

Yo tengo:



SUMA 42

febrero 2003, pp. 111-114

Teoría de números en Internet

Antonio Pérez Sanz

RECURSOS EN INTERNET

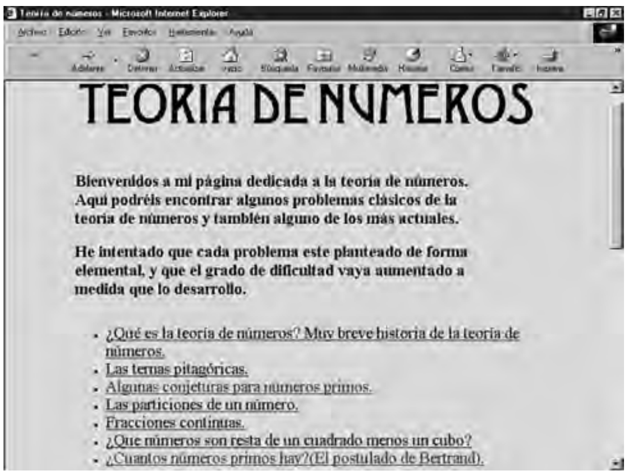
SIN DUDA, a Pitágoras le debemos el nacimiento de las Matemáticas como ciencia. De hecho, el término Matemáticas se le atribuyenormalmente a él.

Podemos resumir la deuda de la Humanidad con los pitagóricos en estos cuatro puntos:

- Proporcionan la primera *visión cosmológica* del universo físico.
- Afirman que la *esencia* del mundo físico es *matemática*.
- Colocan el número natural como origen, fundamento y explicación de todas las cosas.
- Son los responsables de la organización del saber en las cuatro ramas que perdurarán hasta los tiempos de Newton: Aritmética, Geometría, Música y Astronomía. El famoso cuadrivium medieval.

Pero los matemáticos les debemos algo más importante: el nacimiento de la Teoría de Números. Filolao, un siglo después de Pitágoras, llegó a afirmar:

> Todas las cosas que pueden ser conocidas tienen número; pues no es posible que sin número nada pueda ser conocido ni concebido.



En este rincón vamos a realizar una excursión por algunas páginas de Internet dedicadas a la Teoría de Números y nos vamos a detener preferentemente en páginas en castellano.

Nuestra primera y casi obligada visita es a la página titulada «Teoría de Números» de X. Xarles

http://usuarios.lycos.es/somriure/index.htm

No es una página con grandes alardes de presentación visual, pero en cambio es un auténtico tesoro de contenidos aritméticos. En ella encontramos 10 apartados, como el tetractis, no podía ser otro número, cada cual más interesante:

- ¿Qué es la teoría de números? Muy breve historia de la teoría de números.
- Las ternas pitagóricas.
- Algunas conjeturas para números primos.
- Las particiones de un número.
- Fracciones continuas.
- ¿Que números son resta de un cuadrado menos un cubo?
- ¿Cuantos números primos hay? (El postulado de Bertrand).
- ¿Son 8 y 9 las únicas potencias consecutivas? (La conjetura de Catalán).
- Una breve introducción a la aritmética modular: las congruencias.
- Enlaces.

En ella no encontraremos una visión enciclopédica de la historia de la teoría de números pero, al menos, podemos disfrutar de pequeñas chispas que hacen de la aritmética la rama de las matemáticas más compleja, pero a la vez más asequible a un público amplio.

Encontraremos teoremas, como éste:

Teorema: La fracción continua asociada a r es periódica si y sólo si r es solución de una ecuación de segundo grado (que usualmente se les llama cuadráticas).

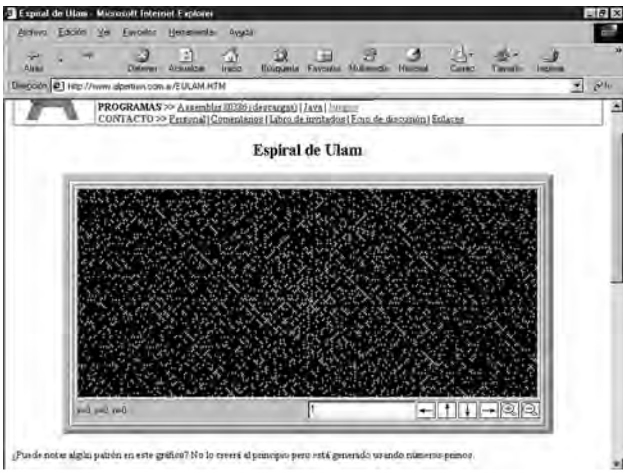
Una aproximación interesante a las principales conjeturas sobre números primos, un pequeño viaje por un tema hoy olvidado, el de las fracciones continuas; y una breve excursión a los principios del siglo XIX de la mano de Gauss y de sus congruencias. Con resultados e informaciones siempre actuales e interesantes. Muchos opositores de secundaria agradecerán un paseo por esta página.

Dario Alpern desde Argentina nos regala otra brillante colección de resultados clásicos sobre teoría de Números, esta vez acompañados de pequeños applets de Java para obtener resultados numéricos concretos. (Por cierto algunos de estos applets tiene dificultades de funcionamiento).

http://www.alpertron.com.ar/TNUMEROS.HTM

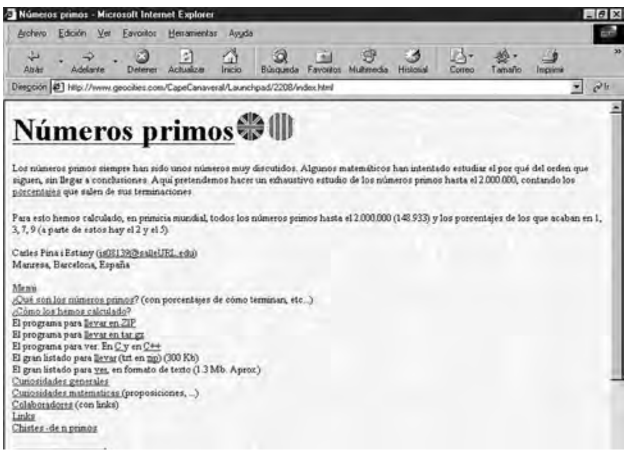
En su página encontramos estos apartados:

1. *Resolución de ecuaciones cuadráticas en dos variables enteras*: Calculadora que permite resolver la ecuación diofántica $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ donde las variables desconocidas x e y tienen la restricción que deben tomar valores enteros solamente. Hay dos modos de ejecución: Sólo solución (donde se muestran los resultados) y Paso a paso (donde se muestra cómo se hallaron dichos resultados). Realizado en Java/Javascript.
2. *Resolución de ecuaciones cuadráticas modulares*: Calculadora que resuelve ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ (mod n). Actualizado el 2 de mayo de 2002.
3. *Suma de potencias*: Tabla de relaciones de la forma $a^p + b^q = c^r$ con mcd(a, b, c) = 1.
4. *Espiral de Ulam*: Applet Java que muestra una representación gráfica de los números primos. Modificado el 10 de noviembre de 2000.
5. *Factorización usando curvas elípticas*: Applet capaz de encontrar factores de 20 o 30 dígitos de números o expresiones numéricas de hasta 1000 dígitos. Calcula además la cantidad y suma de los divisores, el indicador de Euler y la función Moebius del número y su descomposición como suma de hasta cuatro cuadrados perfectos.
6. *Factorización de enteros gausianos*: Applet capaz de encontrar factores de números complejos de la forma $a + bi$ donde a y b son enteros. Incluye una calculadora que permite calcular expresiones que incluyen operadores y funciones con enteros gausianos. Actualizado el 1 de junio de 2002.
7. *Calculadora de logaritmos discretos*: Applet que calcula el exponente en la expresión $Base^{Exponente}$ = *Potencia* (mod *Módulo*). Actualizado el 31 de marzo de 2002.



8. *Calculadora de fracciones continuas*: Permite hallar el desarrollo en fracciones continuas de números racionales y de irracionalidades cuadráticas. Actualizado el 28 de abril de 2002.
9. *Todo entero positivo es la suma de cuatro cuadrados perfectos*: Demostración constructiva de este teorema interesante. Actualizado el 5 de octubre de 2001.
10. *Suma de cuadrados*: Esta calculadora halla la descomposición de un número o expresión numérica en una suma de hasta cuatro cuadrados. No necesita la factorización en números primos. Actualizado el 1 de diciembre de 2002.
11. *Números brillantes:* Problema interesante sobre productos de dos números primos del mismo tamaño.
12. *Factores de números de Fermat modificados*: Factores de números de la forma $4^{3n}+2^{3n}+1$ y $4^{3n}-2^{3n}+1$.
13. *Factores de números cercanos a googolplex*: Factores de números en el rango $10^{10^{100}}$ a $10^{10^{100}} + 999$.

Carles Pina nos brinda en su página un estudio curioso, con software incorporado, sobre las terminaciones de los números primos. Y junto a ello un programa para decidir si un número es primo o compuesto.

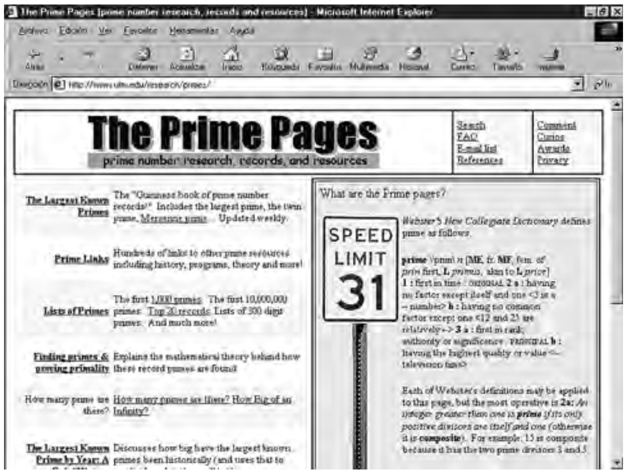


http://www.geocities.com/CapeCanaveral/

Launchpad/2208/index.html

Si estas dispuesto a utilizar el idioma inglés, es obligada la visita a la web con la información más exhaustiva sobre todo tipo de números primos:

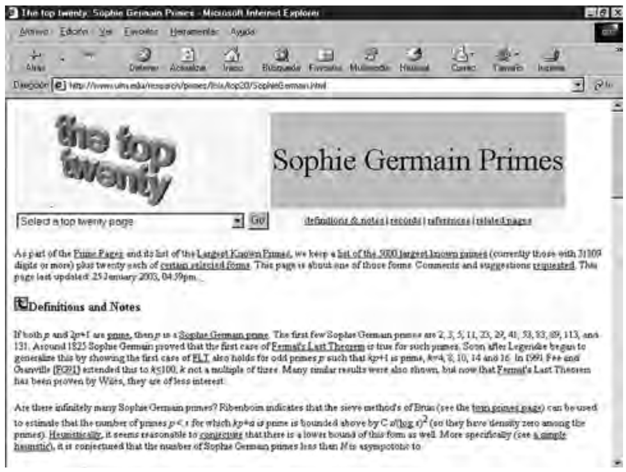
http://www.utm.edu/research/primes/.



En ella encontrarás información sobre el mayor número primo conocido en la actualidad, pero además podrás disfrutar de una amplia información sobre los distintos tipos de números primos, curiosidades sobre los más grandes, conjeturas, resultados teóricos, historia, personajes...

Los primos de Sophie Germain

Si los números p y $2p + 1$ son primos entonces p es un primo de Sophie Germain. En apariencia no son especialmente interesantes, salvo por el hecho de que gracias a ello la célebre matemática francesa dio un notable impulso a la demostración parcial del Último Teorema de Fermat.



Si quieres más información sobre el tema no dejes de visitar esta página:

http://www.utm.edu/research/primes/lists/top20/SophieGermain.html

Por cierto si quieres información sobre la demostración del Último Teorema de Fermat te sugiero que visites esta web:

http://www.ciencia.cl/CienciaAlDia/volumen2/numero1/articulos/articulo1.html

Y para terminar esta pequeña excursión por el mágico número de los números naturales, yo también he querido poner mi granito de arena en la divulgación de esta apasionante rama de las Matemáticas, si quieres información sobre las diversas aportaciones al estudio de los números poligonales o figurados a lo largo de la historia no dejes de visitar esta dirección:

http://platea.cnice.mecd.es/~aperez4/numeroshtml/numeros.htm

Te sorprenderá la larga lista de matemáticos notables que a lo largo de más de dos mil años se han sentido atraídos por estos «ingenuos» números.

SUMA 42
febrero 2003, pp. 115-119

Hacer de las Matemáticas un lenguaje verdaderamente universal

Ángel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba

A la memoria de Ilona Lackova[1]

DURANTE ESTAS NAVIDADES, la tragedia del Prestige ha puesto de manifiesto el imposible sincretismo entre la actual concepción del progreso y la ecología. El prestigio occidental basado en la ciencia, el desarrollo industrial, y el petróleo como fuente de energía, se partía en dos destruyendo sin escrúpulo parte de los pocos recursos naturales que este neoliberalismo no ha confiscado todavía.

La acumulación de beneficios por parte de las empresas, convertida primero en axioma y más tarde en dogma, las ha dejado fuera de la corriente de solidaridad que ha catapultado la conciencia ciudadana[2]. Al final, la juventud, y esto no es cuestión de edad fisiológica, desabastecida de protección social y justicia distributiva, vestida de un impoluto blanco, recogía los excrementos del liberalismo económico con sus propias manos, para salvaguardar algún principio ético de esos que nos negamos a entregar en derrota. Un buen momento, no más que cualquier otro, para preguntarnos qué es el progreso y, como esto va de historia, para buscar una aproximación parcial[3], y tendenciosa ¡por supuesto!, que dé respuesta a la, para algunos, omnipresente pregunta de ¿qué polvos trajeron estos lodos?

Un lenguaje universal

Hace unos días, mientras releíamos ese excelente compromiso con la educación que constituye el manifiesto de La Gomera[4], nos encontramos con la afirmación de que había que aprovechar el carácter universal del lenguaje matemático desde un punto de vista intercultural... y, por un momento, pasaron por la cabeza los y las Dai Chin, Jamila, Cristian, Fawda, Hasna, Hasania, Latifa... que pueblan nuestros centros, y pensamos en comprarnos un traje blanco con sombrero a juego... Y es que, la enseñanza de la Matemáticas es tan fina, tan delicada, tan inmaculada, ... tan ... perfecta, que no la pringan ni el chapapote de las medidas que las distintas administraciones están aplicando para atender la multiculturalidad. Un problema, en apariencia distinto al del epígrafe anterior, pero que en el fondo no es otra cosa que una consecuencia más del colonialismo occidental.

DESDE LA HISTORIA

Pero, y perdonad este irrespetuoso trato coloquial: ¿De qué vamos? ¿Las Matemáticas un lenguaje universal? ¿Cuál es el reducido universo de expertos al que nos referimos? Nos negamos a pensar que una afirmación tan sentida y generalizada sea producto de una consciente demagogia, o de una interiorizada ceguera que nos impide ver esta disciplina, desde el punto de vista de su enseñanza, como uno de los instrumentos favoritos del positivismo occidental. ¿De verdad alguien cree que la extracción social, cultural, étnica... no condiciona las Matemáticas que interesan a nuestras alumnas y alumnos, e incluso las que son capaces de crear? Más aún, transcurridos un par de años desde que se abandona la enseñanza obligatoria ¿alguien piensa, en serio, que una ecuación de segundo grado o un polinomio es un punto de encuentro universal?, ¿para cualquier ciudadano?, y si lo piensa... ¿en qué sentido, en su semántica o en su sintaxis? La situación es suficientemente inquietante para que nos planteásemos el inaplazable problema de construir unas matemáticas inclusivas, como primer paso hacia una sociedad intercultural. Esa ha sido nuestra preocupación de fondo cuando, a lo largo de estos artículos, hemos insistido en destacar las relaciones entre la historia de las Matemáticas y el mundo islámico.

Desde estas páginas hemos reivindicado el mestizaje cultural y el honor de haber participado, desde la Península, en ese momento álgido del desarrollo científico y filosófico que marcó de forma tan decisiva el devenir posterior del mundo occidental. Es ahora el momento de reflexionar sobre esa particular evolución que nos ha situado frente a la catástrofe del Prestige y nos abocará, si no lo remediamos antes, a una confrontación interétnica en nuestras aulas. Dos caras, sin más, de una misma moneda.

Una reflexión necesaria, porque, si de construir una sociedad intercultural y una escuela inclusiva se trata, tan importante es saber lo que nos une con otras civilizaciones como identificar de qué se alimenta nuestro etnocentrismo: ese núcleo duro de la propia cultura, excluyente y dogmático, que es fundamento y cuna de nuestro propio integrismo. Y ese análisis nos sitúa en 1492, un crucial momento en el que occidente comienza su colonialismo americano y se inicia el destierro definitivo de la cultura musulmana de territorio hispano. ¿Qué pasó a partir de ahí y qué papel jugaron las matemáticas en el proceso?

Aritmética y capitalismo

El protagonismo de las aritméticas mercantiles sería muy peculiar puesto que contribuyeron a eliminar de las conciencias de las autoridades eclesiásticas, y de la propia burguesía, los problemas éticos imputables al concepto de lucro. El intercambio comercial fue imponiendo, poco a poco, un liberalismo de precios tan salvaje y descarnado que llevó a los clérigos del siglo XVI a clamar contra la usura[5], en una actitud que fue pasando desde la total ortodoxia de la prohibición a la dulcificación progresiva de la condena. Alegaron primero la hipótesis del riesgo mercantil y formularon más tarde una teoría sobre la balanza de pagos que acabó por justificarla. No en vano los comerciantes eran, con sus dádivas, una de las principales fuentes de financiación de la Iglesia[6].

El modelo de capitalización de la riqueza había roto las restricciones feudales, abriendo paso al convencimiento de que era posible un desarrollo ilimitado en el que la navegación jugaba un importante papel. Pero su importancia dependía de que se fuera capaz de resolver dos serios problemas[7]: el uso de cartas marinas y la determinación de la longitud. Los portulanos habían revelado su escasa utilidad en mares abiertos y en grandes distancias por su particular sistema de proyección doble de paralelos y meridianos, por un lado, y rumbos fijos por otro. La solución matemática llegaría, en 1569, de la mano de Gerhard Kramer (Mercator) y de los logaritmos. El problema de determinar la longitud lo resolvió, de forma definitiva, el cronómetro marino, aunque no fuese una realidad hasta 1770.

Pese a lo que pudiera parecer por los párrafos anteriores, y a que a finales del siglo XVII se daban ya las condiciones para el posterior desarrollo del modo de producción capitalista, sería erróneo pensar que la fuerza impulsora de la ciencia en este siglo era exclusivamente utilitaria. Mantenía aún el prestigio de la filosofía del mundo antiguo, que se había encargado de potenciar el Renacimiento, y conservaba todavía el título de filosofía natural. Pero, con todo ello, el siglo XVIII vería nacer tres ciencias aplicadas: la Geodesia, la Astrometría y la Mecánica celeste. Según Bernal (1967), «el nacimiento de la [nueva] ciencia se produjo inmediatamente después que el del capitalismo», con él «la idea de progreso, tan extraña a la mentalidad medieval, […] emprendió su triunfante carrera».

Las matemáticas y la revolución burguesa

En Inglaterra, la ciencia, tras someter con Newton la naturaleza al dictado del álgebra, había iniciado un camino que la llevaría a convertirse en la enseña de la nueva civilización industrial. Y, sin embargo, como muestra el ejemplo de la máquina de vapor, la Revolución Industrial fue más un producto de cambios tecnológicos y de la transformación del sistema económico, del capitalismo, que del desarrollo científico. Pero, mientras tanto ¿qué hacían los matemáticos en ese siglo al que Boyer, bajo la perspectiva de esta disciplina, definirá como un prosaico interludio? Nada más sencillo, hacer realidad aquella frase que

Napoleón I todavía no había pronunciado: «El progreso y el perfeccionamiento de la matemática están íntimamente ligados a la prosperidad del estado». En Francia, concretamente, preparar primero y desarrollar después la Revolución[8] de 1789. La mayoría de ellos tuvieron una participación tan activa[9] que, aunque pueda parecer exagerado, estableceremos una comparación con la de León Trostky en la Revolución Rusa.

Según describe él mismo, Trostky participó en el levantamiento de Octubre y en el Gobierno de los Soviets, fue Comisario del Pueblo para las relaciones exteriores y más tarde Comisario de Guerra y Marina, para pasar después a la organización del ejército y los ferrocarriles. El resto de su tiempo lo dedicó a la militancia y a escribir. Lazare Carnot, por ejemplo[10], formó parte de la Asamblea Legislativa de 1791 y fue presidente de la Convención de 1792. Impulsó la creación del Comité de Salud Pública y, en realidad, fue el artífice principal de las victorias de los ejércitos revolucionarios. En 1800 fue nombrado Ministro de la Guerra y en 1802 miembro del Tribunado. Como General de División defendió la plaza de Anvers en 1814. Después sería nombrado ministro del Interior y miembro del Gobierno Provisional tras la caída del Emperador. Y, como Trostky, terminó su vida política en el exilio.

Y es que «La estructura de la sociedad marca los cuadros de la creación científica, la forma exterior de su trabajo, una cierta moda en la elección de los temas y de la manera de presentarlos. Estas interacciones son más fácilmente visibles en las épocas, donde las pasiones son más fuertes y la vida más intensa» ...pero existen siempre, tanto si se quiere, como si no, ser consciente de ellas. Cerrar los ojos, enrocarse en el platonismo del conocimiento puro para que el torreón de marfil de la neutralidad te proteja de las miserias del mundo real, es una forma, como otra cualquiera, de situarse al servicio de las ideas dominantes. También desde nuestra labor de profesores.

Pero, en esta breve descripción de la forma en que las Matemáticas han contribuido a dar el largo salto que va desde la apuesta por la racionalidad de Averroes hasta el positivismo deshumanizador de Comte, debemos hacer referencia a un hito que es, en sí mismo, el símbolo de la globalización[11]. Se trata, evidentemente, del nacimiento del metro y de la consiguiente implantación del Sistema Métrico Decimal.

La unificación de las medidas tradicionales fue una necesidad de las monarquías absolutistas, imprescindible para una eficaz organización del Estado y para controlar los impuestos. Los jacobinos, por su parte, propusieron una métrica en base diez que acabase con el modelo duodecimal y con cualquier otra referencia al pasado. Pero el requisito de uniformidad e internacionalización fue una exigencia del desarrollo industrial. Y es que, aquella propuesta de Talleyrand a la Asamblea Nacional de proporcionar *a tous les temps et a touts les peuples* un prototipo métrico *tomado de la naturaleza*, era cualquier cosa menos inocente e ingenua.

Las nuevas medidas significaban un profundo cambio de las relaciones sociales. Pero no soólo eso: los geodestas franceses, ante el elevado costo de sus investigaciones, no tuvieron el más mínimo reparo en justificar sus peticiones económicas con argumentos como: *Un buen mapa permitiría conocer mejor la posición de los soldados en la batalla*. Ciertamente, una cartografía precisa eliminaba los problemas de reconocimiento del terreno antes de la invasión y posibilitaba el poder situar con exactitud las fuentes de materia prima y construir las vías necesarias para explotarla. En resumen, una correcta planimetría podía facilitar a Francia conquistar el mundo. Y es que, en palabras de Biot: «...la ciencia también tiene su política: algunas veces, para servir a los hombres, se necesita acudir al engaño».

En brazos del positivismo

Estamos, por tanto, en la época del metro, que es como decir de la tríada ciencia-poder-colonialismo. Bajo el influjo de una sensibilidad que nos lleva de la mano a August Comte, Stuart Mill y Jules Ferry. La revolución francesa, que cuenta entre sus méritos más indiscutibles el haber generalizado la educación, elevó también el «cuadrivium» al nivel de los conocimientos básicos. Para entonces, Saint-Simón había transformado el progreso y la razón técnica en la nueva religión que ofrecía fundamento y salvaguarda al poder de los industriales: «Las opiniones científicas, transmitidas por la escuela, deberán cobrar formas que las vuelvan sagradas». ¡Desde luego que lo hemos conseguido! ¡Y con qué eficacia!

La ciencia, entendida como suma de hechos comprobados y relaciones mensurables entre sucesos cuantificables, no tardaría en traspasar los límites de lo material para convertir la política en sociología. 1848 conocerá, de la mano de Comte, el nacimiento de su Asociación Libre para la Instrucción Positiva y no tardaría en intentar convencer a dos de los poderes más conservadores del momento: el zar de Rusia y el visir del Imperio Otomano, de la necesidad de apostar por el totalitarismo científico.

El positivismo excluía, por una parte, la posibilidad de reflexionar sobre las causas, porque remitían de nuevo a las tinieblas teológicas de la Edad Media, y, por otra, rechazaba el análisis de las consecuencias bajo el epítome axiomático de la bondad del progreso. Evitaba así una confrontación con el materialismo que le permitía, de paso, conceptualizar la mejora social a partir de una descarada y descarnada revisión de la esclavitud[12]. Desde su exclusivista posicionamiento, la primacía racional, científica y técnica otorgaba a occidente la condición de raza superior y el derecho a expandir el nuevo evangelio por la vía del colonialismo[13]. Esa misma dominación imperialista que justificó en cada momento el que Kuwait se desmembrase de Irak, la Guerra del Golfo, la de Afganistán y las que vendrán...

Pues bien, esa concepción positivista de la jerarquía de culturas sirve todavía de fundamento ideológico al concepto de integración étnica. No está escrito en el aire de las especulaciones manifiestamente ideológicas: la *Encyclopedia Universalis* (1985) resume el concepto de integración en tres principios básicos: aculturización, asimilación y dispersión. A través del primero se debe producir la renuncia a la propia cultura y adoptar los usos y costumbres de la dominante (la nuestra, ni qué decir tiene). La asimilación debe garantizar que se ha interiorizado el proceso para que la aplicación de los esquemas del individualismo occidental consiga atomizar sus comunidades y disolverlas como un azucarillo en un vaso de leche. Ese es el objetivo utópico de las sociedades industrializadas: que los inmigrantes-esclavos, como la sacarina, endulcen sin dejar huella ni poso. El elevado número de asilados extranjeros hizo imposible el objetivo de integrar-asimilar en Inglaterra, que apostó por la multiculturalidad. Un modelo de plato combinado que siempre permite apartar todo aquello que disgusta al paladar exigente.

De vuelta al aula

Pero, cuidado, esos posicionamientos lejos de haber sido superados están tan profundamente enraizados en nosotros como para que, en mitad de la refriega de El Egido, «el menos dogmático de los policías municipales» de la localidad, según *El País*, afirmara que «El problema, está en la falta de integración de los inmigrantes por los hábitos tan especiales que tienen. […] Eso no es racismo. Es un rechazo en cierta manera lógico. Además, puede que nosotros tengamos parte de culpa por no enseñarles nuestras costumbres en cuanto bajan de la patera».

Ante la disyuntiva, algunos preferimos un modelo intercultural donde las personas sean antes que nada ciudadanos y ciudadanas, y donde el resultado final se beneficie, como en la ensalada, la macedonia o el gazpacho, de la aportación libre del sabor y la textura de sus componentes. Y eso tiene profundas implicaciones didácticas. La primera que, dentro del aula y previamente, cuando se organizan los grupos, los chavales son alumnos o alumnas antes que magrebíes, colombianos, chinos o cameruneses. La segunda que hemos de tomar conciencia de nuestro etnocentrismo y luchar desde las Matemáticas y la Tutoría contra ese primitivismo anulador.

El esfuerzo por desterrar el eurocentrismo nos debe llevar a recuperar la memoria histórica acerca de las aportaciones de otras culturas que enaltecieron y construyeron la nuestra, a sentirnos deudores de ellas, pero también a borrar del horizonte de nuestras aulas la mitificación que hemos construido de occidente a base de dotar de nombre propio a los teoremas de otros. Por ejemplo, podríamos empezar, a título simbólico, por llamar teorema del kou-ku[14] al de Pitágoras y, a un nivel mucho más profundo, por apostatar de ese íntimo convencimiento de que formamos parte de una cultura que se autoengendró y nació del exclusivo seno de una virgen griega. Pero, si de buscar una propuesta de trabajo más concreta se trata, os invitamos a investigar no tanto los orígenes como la estela que a lo largo de los siglos han ido dejando infinidad de problemas de esos que llamamos clásicos y que, quizás por ello, siguen adornando nuestros libros de texto[15].

Ahora bien, adoptar una actitud inclusiva supone también negarse a comulgar con ruedas de molino: no aceptar las condiciones en que se integra en las aulas al alumnado con un desconocimiento total de cualquier idioma[16] en el cual poder entenderse, ni grupos de más de quince personas que, por retraso escolar, problemas de aprendizaje o de conducta, o por la razón que fuere, requieran una atención individualizada. Un grupo de esas características con un número superior de alumnos, no es una clase, es un gueto.

La universalidad del lenguaje matemático más que un medio es un objetivo. Más que el principio del cual partir, debería de ser ese puerto al que nunca acabamos de llegar. Y eso no implica, es cierto, grandes modificaciones curriculares en lo que a conceptos se refiere, pero obliga a una radical transformación de los procedimientos y a una profunda adecuación del modelo evaluador, integrándolo, de una vez por todas, en el proceso de enseñanza-aprendizaje. No hacen falta grandes alardes a la hora de definir objetivos, ni temibles listados de conceptos, procedimientos, actitudes o criterios de evaluación, basta con tomar como modelo a seguir a Ibn al-Waqqasi, tal como lo define Sa`id al-Andalusí[17], y perseguir la formación de personas «de pensamiento sólido y reflexión penetrante». Para ello ni siquiera sería necesario que nuestro alumnado dominara todas las áreas de conocimiento. Lo que sí sería conveniente es que aprovecháramos la idea –no tanto los fines– de Mohamed Ábed Yabri (2001) para iniciar, también desde occidente, una «crítica científica de la razón» o lo que es lo mismo analizar el acto intelectual que ha dado origen al pensamiento contemporáneo.

Referencias bibliográficas

Aunque preferimos intercalar las referencias bibliográficas en el texto, junto a las ideas que se han tomado prestadas, en este caso hemos optado por aligerar su lectura incluyéndolas al final:

BERNAL, J.D. (1967): *Historia Social de la Ciencia I y II*, Ediciones Península, Barcelona.

BOYER, C.B. (1986): *Historia de la Matemática*, Alianza Editorial, Madrid

GARAUDY, R. (1991): *Los integrismos*, Gedisa, Barcelona.

DHOMBRES, N. y J. (1989): *Naissance d'un nouveau pouvoir: sciences et savants en France 1793-1824*, Ediciones Payot, París.

DE LORENZO, J.A. (1998): *La revolución del metro*, Celeste Ediciones, Madrid.

MARTÍN, M. (1976): *Comte, el padre negado. Origen de la deshumanización de las ciencias sociales*, Akal, Madrid

USÓN, C. (2001): «La resistencia a la globalización», en *Unidades de medida en La Rioja*, Fundación Caja Rioja, Logroño.

TATON, R. (director) (1988): *Historia General de las Ciencias*, Editorial Orbis, Barcelona.

TROSTKY, L. (1978): *Mi vida*, Editorial Tebas, Madrid.

YABRI, M.Á. (2001): *El legado filosófico árabe*, Editorial Trotta, Madrid.

Notas

1 Cuando ya teníamos casi cerrado este escrito nos hemos enterado de la muerte de Ilona Lackova. Aunque su relación con las matemáticas sea irrelevante, su memoria servirá de puente y excusa para la redacción del próximo artículo, que será además nuestra despedida de esta temporal colaboración con SUMA.

2 Con las excepciones que convengan y que, curiosamente, no afectan a las petroleras.

3 En realidad una simplificación. Como comenta Bernal no es posible establecer relaciones lineales de causa-efecto en un momento en el que las interacciones entre ciencia, industria y economía son mucho más ricas y complejas de lo que caben en este artículo.

4 Sociedad Canaria Isaac Newton: «Seminario de reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas», *Suma* n.° 37, Junio 2001.

5 Entre las obras que nos han llegado, dentro del ámbito nacional, tenemos: *Instrucción de mercaderes* de Sarabia de la Calle, *El provechosos tratado de cambios y contrataciones de mercaderes y reprobación de la usura* de Cristobal de Villalón, el *Tratado de los préstamos que pasan entre mercaderes y tratantes y por consiguiente de lo logros, cambios compras adelantadas y ventas al fiado* de Fray Luis de Alcalá, el *Tratado de cuentas* de Diego del Castillo o *El comentario resolutorio de cambios* de Martín de Azpilicueta, todos ellos alrededor de 1550. Un poco más tarde, en 1569, *La suma de tratos y contratos* de Tomás de Mercado.

6 Sirva como ejemplo el hecho de que una de las mayores fortunas de la burguesía aragonesa, el capital de los Zaporta, se dilapidó, al extinguirse la familia, en la financiación de la Cartuja de la Inmaculada de Zaragoza.

7 De su importancia dan idea los astronómicos premios que ofrecían los distintos gobiernos europeos y que multiplicaban por 200 el salario anual de un astrónomo real. Esa fue la cantidad que percibió Harrison del gobierno inglés gracias a su cronómetro marino. Felipe III ofrecía 6000 ducados de renta perpetua, 2000 de renta vitalicia y 1000 para ayuda de costas. Y es que el tema no sólo afectaba a la navegación: españoles y portugueses se habían repartido el mundo en Tordesillas, en 1494, con referencia a un meridiano cuya posición exacta fue siempre difícil de establecer. También la Mecánica Celeste es deudora de esta situación gracias a que el estudio del movimiento de la Luna frente a las estrellas fijas fue una propuesta alternativa al problema de la longitud.

8 Sobre el hecho de que su concordancia temporal con la Revolución Industrial fue mucho más que una coincidencia no parece necesario extenderse porque existe abundante bibliografía al respecto.

9 P. Sergescu, 1949, en *Mathématiciens français du temps de la Révolution Française* ofrece un detallado catálogo de las actividades desarrolladas por los matemáticos franceses a lo largo de este interesantísimo periodo.

10 Se puede elegir a Monge como modelo, si se prefiere: su vida política, al igual que la de Carnot, estuvo colmada de responsabilidades. Y, al igual que Trostky, también dedicó sus ratos libres a la militancia activa. Su *Geometría Descriptiva*, desarrollada de cara a la construcción de fortificaciones, constituyó durante 27 años un secreto militar celosamente guardado. Su alumno Carnot, entre verso y verso, también escribió un estudio sobre la dirección de las balas. Dicho lo cual conviene hacer una salvedad: Trostki fue un ideólogo de la revolución, cosa que no fueron ni Monge ni Carnot.

11 No sólo métrica, para mayor detalle véase: C. Usón (2001)

12 Más allá de la teoría C. Dikens lo describió con la maestría de un gran literato.

13 Jules Ferry, *Journal Officiel* (Cámara de Diputados): «Las naciones superiores tienen un derecho sobre las inferiores».

14 Con este nombre era conocido en la antigua China, en referencia a los colores kou (rojo) y ku (azul) de las figuras que intervenían en su demostración.

15 Sabia denominación, por cierto, aunque algo eufemística. Libros de doctrina sería más adecuado en casi todos los casos.

16 Pero, ¡cuidado!, el aprendizaje del castellano (o de la lengua que sea) es responsabilidad de todos. Un idioma sólo se aprende dentro del contexto en el que resulta necesario y el aula de Matemáticas también forma parte de ese contexto.

17 Sa`id al-Andalusí escribió en 1068 el *Libro de las categorías de las Naciones (Kitab Tabaqat al-uman)* posiblemente el primer tratado de historia de la ciencia que se conoce. Una traducción de Eloisa Llavero fue publicada por editorial Trotta en el año 2000. En ella Sa`id elogia al juez de Talavera Abu-l-Walid Hisam ben Ahmad ben Hisam Jalid al-Kinani (Ibn al-Waqqasi) como «uno de los eruditos cuyo saber se extendía al dominio de todas las ramas del conocimiento. Era un hombre de pensamiento sólido y reflexión penetrante. Dominaba perfectamente la geometría y la lógica [...] la gramática, lexicografía, poesía, retórica, derecho islámico, tradiciones históricas y teología especulativa. Era, además, un elocuente poeta y una eminencia en todas las ciencias, no existiendo ningún genealogista, historiador o biógrafo que lo aventajase». Otro más para la colección de desapercibidos...

PUBLICACIONES DE LA FEDERACIÓN

LISTA DE PRECIOS

Fondo actual	Socios	No socios
1. *Los Historiadores de la Matemática Española*, Francisco Vera	4 €	6 €
2. *Instrumentos y Unidades de Medida Tradicionales en Extremadura*, Sociedad Extremeña de Educación Matemática	12 €	14 €
3. *Abraham Zacut*, J.M. Cobos Bueno	9 €	12 €
4. *Utilización de Maple como apoyo a la matemática en el Bachillerato*, José Ángel Méndez Contreras	7,5 €	
5. *Las matemáticas de Alicia y Gulliver*, Jordi Quintana Albalat	1 €	
6. *La rosa de los vientos*, Juan Antonio García Cruz	1 €	

Fondo antiguo	Socios	No socios
1. *IV OLimpiada Matemática Nacional Española*, FESPM	3 €	6 €
2. *Actas VI JAEM*, Sociedad Extremeña de Educación Matemática	3 €	4 €
3. *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*		
• *Geometría y sentido espacial*	6 €	7 €
• *Geometría en el Ciclo Medio*	7 €	9 €
• *Geometría desde Múltiples Perspectivas*	7 €	9 €

Pedidos: Servicio de Publicaciones de la FESPM. Apdo. de Correos 590. 06080 BADAJOZ
e-mail: PublicaFESPM@navegalia.com

SUMA 42

febrero 2003

Un clásico de historia

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA
Carl B. Boyer
Alianza Universidad Textos
Madrid 1992
Versión española de Mariano Martínez Pérez
ISBN: 84-206-8094-X
808 páginas

Título original:
A HISTORY OF MATHEMATICS

Entre los libros que tratan sobre temas científicos podemos encontrar algunos que se leen por placer y otros que se leen por necesidades relacionadas con nuestro trabajo. Los primeros suelen tener carácter divulgativo y los segundos se centran, generalmente, en alguna parcela específica del conocimiento científico. Sin embargo, existen algunos libros que se pueden leer por los dos motivos antes mencionados. Uno de estos últimos es la *Historia de la Matemática* de C.B. Boyer que, a estas alturas, podemos considerar un clásico en su especialidad.

RECENSIONES

En efecto, esta obra nos conduce por un recorrido a través de la historia de la Matemática que comienza tratando el concepto de número en el primer capítulo, dedicado a los orígenes primitivos, y termina con la noción de estructura y la matemática bourbaquista surgidas durante el siglo XX, pasando, entre tanto, por los puntos más destacados de la génesis del conocimiento matemático a lo largo de todas las épocas, incluyendo referencias a la matemática china e india (Capítulo XII) y a la árabe (Capítulo XIII). En este recorrido podemos disfrutar de una prosa fluida y precisa, en la que se entremezclan de una forma bastante equilibrada los personajes y las ideas, inmersos, a su vez, en un orden cronológico, lo que nos permite seguir, de una forma amena, el nacimiento de los conceptos más importantes de la Matemática, sin necesidad de tener una gran formación en esta disciplina. Un aspecto que merece ser destacado es la excelente traducción al castellano del profesor Mariano Martínez.

Pero también es un libro que deben tener a mano todas las personas cuya relación con la Matemática sea de índole didáctico, sobre todo los profesores de Bachillerato si, como es de suponer, se pretende presentar los contenidos de Matemáticas no como algo acabado, atemporal, sin relación con una época y con una sociedad determinadas, sino, por el contrario, como una disciplina viva y relacionada con la cultura imperante en cada etapa de la historia. En este sentido, estamos ante un libro que combina perfectamente la amplitud de los temas tratados con la profundidad de los mismos, lo que lo convierte en un buen manual para preparar introducciones históricas para cada uno de los temas del currículo de Matemáticas de Bachillerato, en las que se puedan estudiar los orígenes y la evolución hasta la formulación actual de los conceptos propios de la Matemática.

Además de los temas ya mencionados, entre los veintisiete capítulos del libro podemos destacar, sin hacer una enumeración detallada, aspectos como la Matemática en Egipto y Mesopotamia; la cultura Ggriega, desde sus orígenes Jónicos con Tales y Pitágoras hasta el ocaso de Alejandría, pasando por la época heroica de los tres problemas clásicos, el descubrimiento de los inconmensurables, las paradojas de Zenón, etc., Platón y Aristóteles, Eudoxo de Cnido y la teoría de las proporciones. A continuación, aparecen los tres grandes de la Geometría: Euclides, Arquímedes y Apolonio, después se tratan los orígenes de la trigonometría y las técnicas de medición griegas, relacionadas con la astronomía; y, por último, Diofanto de Alejandría y su lugar en la historia del álgebra, así como Nicómaco de Gerasa y Pappus de Alejandría, con lo que llegamos al final del periodo alejandrino. Más adelante, nos encontramos con la Europa medieval de, entre otros, Fibonacci y su *Liber abaci*, Nicolás de Oresme y la *latitud de las formas*; el Renacimiento con Nicolás de Cusa, Luca Pacioli y su Divina Proporción, Leonardo da Vinci y Cardano autor de la *Ars Magna*. Después, aparecen Fermat y Descates y la invención de la geometría analítica, hasta llegar a Newton con la teoría de las fluxiones y los *Principia*, Leibniz y el origen del cálculo infinitesimal, la familia Bernouilli, Taylor y los desarrollos en serie, etc.; la época de Euler; los matemáticos de la Revolución Francesa , el periodo de Gauss y Cauchy y la época heroica de la geometría en la que surge la geometría proyectiva, las geometrías no euclídeas, y los espacios de dimensión superior. Nos encontramos luego con la aritmetización del análisis junto con la aparición de ciertas inquietudes acerca de sus fundamentos, las definiciones de número real y de límite, el Teorema de Bolzano–Weierstrass y las cortaduras de Dedekind. Por último, la aparición del álgebra abstracta y los aspectos del siglo XX.

…estamos ante un libro que combina perfectamente la amplitud de los temas tratados con la profundidad de los mismos, lo que lo convierte en un buen manual para preparar introducciones históricas para cada uno de los temas del currículo de Matemáticas de Bachillerato…

En resumen, se trata de una obra que debe figurar en la biblioteca de toda persona que se dedique a la enseñanza de las matemáticas, aunque esto último no es ninguna novedad, pues si analizamos los resultados de la encuesta, titulada «los cuarenta principales» y realizada por el Comité Nacional del Año 2000, bajo la dirección de la profesora M.ª Jesús Luelmo, con el propósito de, entre otras cosas, detectar los títulos y autores más citados por los profesores de matemáticas, vemos que el título que se destaca, es, precisamente, la *Historia de la Matemática* de C.B. Boyer.

Carlos Mederos Martín

CURRÍCULO Y MATEMÁTICAS
EN LA ENSEÑANZA
SECUNDARIA
EN IBEROAMÉRICA
Alexander Maz
Manuel Torralbo
Concepción Abraira
Servicio de Publicaciones
Universidad de Córdoba
Córdoba, 2002
ISBN: 84-7801-648-1
186 páginas

Obra colectiva cuyo objetivo general consiste en brindar un conocimiento del currículo de matemáticas en algunos países iberoamericanos, centrando el análisis de cada país en los niveles correspondientes a la enseñanza secundaria obligatoria desde los 12 años hasta los 16. El libro se articula bajo dos niveles: el sistema educativo general, describiendo el marco legal en el cual se apoya, y el currículo específico de matemáticas correspondiente a los niveles mencionados, haciendo énfasis en los objetivos, contenidos y criterios de evaluación específicos para el área.

Los países estudiados y sus respectivos autores son: Argentina (Liliana Tauber y Nora Gatica), Brasil (Màrcia Cyrino y Ubiratan D'Ambrosio), Chile (Maryorie Benavides y María Carolina Brieba), Cuba (Aida María Torres y Dámasa Martínez), España (Concepción Abraira, María del Pilar Gutiérrez y Alexander Maz), México (José Guzmán, Fernando Hitt y Manuel Santos), Venezuela (José Ortiz y Ligia Sánchez), Portugal (Carolina Carvalo) y Colombia (Alexander Maz, Miguel Ernesto Villarraga y Manuel Torralbo).

IDEAS PARA LA CLASE DE MATEMÁTICAS. REFLEXIONES Y MATERIALES PARA UNAS MATEMÁTICAS COEDUCATIVAS.
Mª Jesús Luelmo
Xaro Nomdedéu
M.ª Carmen Rodríguez
Fidela Velázquez.
Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias
Gran Canaria, 2001
ISBN: 84-699-5137-8
184 páginas

Se publica este excelente libro –un encargo hecho en 1994 por el extinto Centro de Desarrollo Curricular del MEC, en el que colaboraron, además de las autoras, otras dos profesoras de la Organización Española para la Coeducación Matemática Ada Byron– en un momento que me parece de abandono, tanto institucional como particular (de los docentes), de la coeducación. Y por ello es oportuno, ya que viene afortunadamente a recordar que hay tareas pendientes.

Es un lugar común entre los enseñantes el mejor rendimiento escolar de las chicas frente al de los chicos, lo que las da por salvadas para muchos, sin parase a pensar o a observar el importante tema de cómo son las relaciones entre ambos en los centros. Por mi parte, además, siempre he puesto pegas al «buen rendimiento» escolar de las alumnas. Intentaré explicar el porqué de mis reservas.

Ocurre que el sistema educativo enseña la obediencia y valora bien, por tanto, al alumnado obediente; y las chicas lo son en mayor medida. Deberían pasar varias generaciones de coeducación, social y personalmente consciente, para que empezaran a desprenderse del papel cultural, que ya desempeñaron sus madres y abuelas, de guardianas de la norma. Digo «deberían» y no «deberán» porque tengo sensación de retroceso: por caminos sutiles que cada vez lo son menos [no me parece el momento de un análisis detallado para el que todos y todas tenéis preparación suficiente; sólo una sugerencia: escuchad, por favor, los anuncios de la radio]; el «Sistema» –ese monstruo ciego, inexistente según mis colegas postmodernos, quizás no planificado pero sí muy eficaz– está consiguiendo contrarrestar el efecto publicitario de la mayor presencia social de la mujer. No le ha hecho falta inventar nada nuevo; simplemente insiste en que, más allá de su actividad, siga cargando desde su infancia con las pesadas losas que la limitaron en el pasado.

Hay obediencias y obediencias. Creo que se entiende lo que digo [en caso contrario recúrrase a Erich Fromm (*Sobre la desobediencia*)]. Unas son sanas y otras no. El sistema educativo potencia las segundas al tiempo que incita a despreciar las primeras. Recojo a continuación algunas actitudes perversas anotadas desde mi experiencia, basada en una pequeña muestra de adolescentes del Altoaragón, pertenecientes a una determinada capa social y en unas coordenadas temporales muy concretas:

- No dejarme escribir $2^{0,5}$ porque «siempre se ha puesto $2^{1/2}$».
- Preferir el chapapote calculístico algebraico a la experimentación empírica en geometría.
- Pedir con insistencia recetas y odiar el acto de conjeturar.
- Creer que las matemáticas escolares sirven para algo, hasta el punto de que si no saben resolver ecuaciones pueden llegar a «vivir debajo de un puente».
- Importarles más el fin que los medios.
- Plantearse fines baratos (siguiendo a Alberto Cortez, los que se compran con el dinero).
- Hacer dejación de sus obligaciones como gestores y gestoras, en colaboración con sus colegas y el profesor, del espacio didáctico de la clase de matemáticas.
- Copiar todo. Todo: incluyendo el marco del tablero de la pizarra y el armario donde se guarda el aparato de vídeo.
- Etc., etc.

Las tres primeras son adaptaciones al contexto de la clase de matemáticas de la exigencia general de obedecer que guía la planificación escolar. Con ellas y otras similares, los futuros licenciados y licenciadas en OSO (obediencia secundaria obligatoria; creo que los primeros gestores, en tiempos ya lejanos, intentaron honestamente que fuera ESO) intentan salvaguardar las siguientes de una improbable creatividad del profesor y, con ello, su futuro... material.

Por supuesto que hay alumnos varones que adoptan éstas y otras actitudes similares. Pero, puesto que son consecuencia del oculto currículo escolar –ese que no viene recogido en los papeles pero cuyo cumplimiento se vigila cuidadosamente–, si aceptamos que las chicas son más obedientes, cabe esperar que sean ellas quienes las defiendan más a menudo y con más énfasis. Desde luego, sé que la validez de cualquier afirmación es sólo estadística. También sé que el aparente desinterés de los chicos no es constructivo, puesto que encubre la obediencia insana, los incapacita para la otra y les deja sin recursos para seguir una alternativa si se presenta. Pero, en mi pequeño microcosmos escolar, la respuesta al enunciado «Se elige un estudiante al azar. Se sabe que se manifiesta pública e incluso desairadamente en defensa de las perversiones anteriores u otras parecidas. ¿Qué probabilidad hay de que sea una chica?» da un porcentaje tan superior al 50% que se puede apostar con tranquilidad por la situación que propone.

De manera que sí, hay que salvar a los chicos, claro que sí, ¡¡pero también a las chicas!! Hay que salvarlas de su mala obediencia y de ese programa interno personal que les hace desear con vehemencia la seguridad material y mental desde edades tan tempranas. ¿Que todo esto viene condicionado socialmente y que son resultado de lo que se quiere/intenta que sean? No me cabe duda. Y no creo que sea tan difícil rastrear los hilos conductores de las marionetas. Pero el profesor o profesora de matemáticas actúa sobre casos individuales, y tiene que proponer y motivar cambios individuales.

Así pues, hay que preocuparse de la coeducación en clase de matemáticas. Ese tren no se pasó la estación (aunque nadie se subiera). Sigue ahí esperando y da la impresión de que pocas personas suben a él. Por eso no arranca. La suposición de que nuestra materia es ideológicamente aséptica y que, por tanto, esta componente transversal queda fuera de nuestro campo de competencias, olvida que la elaboración y adquisición de conocimientos se hace siempre en un marco en el que los afectos juegan un papel importante (somos también nuestra circunstancia). Y la clase de matemáticas debería intentar servir, entre otras cosas y por poner algún ejemplo, para que la alumna V... empiece a atreverse a hablar en público y aumente su seguridad en sí misma, o decida por sí sola si ha llegado a una respuesta con garantías para los problemas que ha resuelto y no niegue por sistema la validez de su trabajo. Y con ello, ayudar a que el alumno J... empiece a perder su tópica valoración negativa sobre las mujeres.

El primer capítulo del libro revisa cuestiones ya clásicas para un análisis que permita una acción positiva desde la coeducación. Conviene recordarlas, porque la ola conservadora de los tiempos hace olvidar temas sobre los que la reflexión era habitual hace unos años. De entre todas ellas resaltaré la más directamente relacionada con los comentarios que he hecho anteriormente: por razones sociales y culturales, no forma parte del proyecto vital de gran parte de nuestras alumnas interesarse por las matemáticas. Pero no por la propia materia en sí, sino por el hecho de que son mujeres, y ni la imagen de las matemáticas es socialmente femenina ni sienten que su valoración social fuera a ser alta si se dedican a ellas. Una cuestión clave difícil de combatir incluso desde actitudes de consciencia coeducativa.

De manera que sí, hay que salvar a los chicos, claro que sí, ¡¡pero también a las chicas!! Hay que salvarlas de su mala obediencia y de ese programa interno personal que les hace desear con vehemencia la seguridad material y mental desde edades tan tempranas.

Sólo se me ocurre poner una pega a esta primera parte: el olvido de la componente social, algo habitual en este tipo de estudios. Se contestará que las discriminaciones de género saltan las barreras sociales y culturales, y es cierto, pero hay matices que inciden de forma importante en las aulas y que convendría tener en cuenta. Creo que es urgente la elaboración de un archivo de anécdotas que trasladen a la realidad actual el pensamiento teórico expuesto en este primer capítulo. Y no sólo porque siempre es útil la constatación de la concordancia entre teoría y práctica, sino sobre todo porque los ejemplos convencen más que las explicaciones generales.

El segundo capítulo expone las características del modelo propuesto por las autoras. Modelo de sociedad (desde la perspectiva de la problemática del género), modelo de matemáticas y modelo educativo. En los capítulos tercero y cuarto, un amplio listado de propuestas didácticas, acompañadas de comentarios metodológicos, en la mejor tradición de innovación que ha habido en nuestro país: la del Grupo Cero de Valencia.

En definitiva, una bonita (también físicamente; la edición es muy agradable), útil y oportuna publicación, cuyo único problema va a ser su no distribución comercial, como ocurre con tantas otras editadas por las instituciones. Es obligado agradecer a la Consejería de Educación del Gobierno de Canarias que haya decidido recuperar este trabajo del olvido al que lo habían condenado los avatares políticos.

Ángel Ramírez Martínez

INVESTIGACIÓN EN
EL AULA DE MATEMÁTICAS:
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
José M. Cardeñoso
Encarnación Castro
Antonio J. Moreno
María Peñas (Editores)
Departamento de Didáctica
de la Matemática
de la Universidad
de Granada y SAEM Thales
Granada, 2002
269 páginas

Este libro constituye las actas de las jornadas sobre Investigación en el aula de matemáticas, que periódicamente organizan la Sociedad Thales y el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y que en esta ocasión están centradas en la Resolución de problemas.

Se recogen los textos de cinco conferencias, «La resolución de problemas desde la investigación en educación matemática» (E. Castro), «Evaluación de la resolución de problemas aritméticos en el marco de un proyecto europeo» (J.D. Godino), «Experiencias sobre la resolución de problemas en el aula de secundaria» (F. Luque), «Arte fractal» (J. Martínez) y «Matemáticas de ayer para el aula de hoy» (C.O. Suárez); tres talleres, «Materiales didácticos en la resolución de problemas» (El Grupo PI), «Puzzles en alambre» (P. Flores) y «Resolución de problemas con lápiz y papel» (F. Fernández); así como una mesa redonda y una veintena de comunicaciones.

AÑO MUNDIAL
DE LAS MATEMÁTICAS
Gustavo Ochoa
José Ramón Pascual (Editores)
Universidad Pública
de Navarra
Pamplona, 2002
ISBN: 84-95075-76-8
174 páginas

Este libro reseña el conjunto de actividades que tuvieron lugar en Navarra, con motivo del Año Mundial de las Matemáticas, y organizadas por el Comité Navarro, que se formó por iniciativa del Departamento de Matemática e Informática de la Universidad Pública de Navarra y de la Sociedad de profesores de Matemáticas «Tornamira».

Amén de las intervenciones en los actos de apertura y clausura, se incluyen los textos de las conferencias sobre las matemáticas y su enseñanza que se impartieron, las bases y los fallos de los diversos concursos de fotografía matemática, las fotografías premiadas, los problemas planteados en la Olimpiada Matemática celebrada en dicho año, y los artículos sobre cuestiones de la disciplina que algunos vocales publicaron en la prensa local. Entre los autores figuran Pedro Burillo, Claudi Alsina, Carmen Herrero, David Nualart, Rafael Pérez, Esteban Induráin y Javier Bergasa.

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA
Enrique Castro (Editor)
Síntesis
Madrid, 2001
ISBN:84-7738-919-5
624 páginas

El objetivo de este manual (n.° 1 de la serie Didáctica de la Matemática, que publica la editorial Síntesis) es proporcionar un marco conceptual sólido y unas herramientas útiles tanto para la formación del profesorado de matemáticas de Educación Primaria como para su trabajo en el aula.

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se aborda desde una perspectiva propia que integra el conocimiento matemático con el didáctico, y lo ejemplifica con un estudio detallado de los correspondientes temas básicos del currículo. Asimismo, el libro ofrece una aproximación disciplinar propia y original a las nociones relacionadas con la formación en Didáctica de la Matemática.

Los capítulos de este libro han sido elaborados por profesores de distintas universidades andaluzas y abordan los diferentes temas bajo un mismo esquema. Sus títulos son los siguientes:

- Matemáticas en Educación Primaria (Luis Rico).
- Aprendizaje y evaluación (Pablo Flores).
- Materiales didácticos y recursos (Moisés Coriat).
- Unidades didácticas. Organizadores (Isidoro Segovia y Luis Rico).
- Los procesos matemáticos como contenido. El caso de la prueba matemática (Mercedes García y Salvador Llinares).
- Primeros conceptos numéricos (Enrique Castro y Encarnación Castro).
- El sentido numérico y la representación de los números naturales (Salvador Llinares).

- Adición y sustracción (Carlos Maza).
- Multiplicación y división (Enrique Castro).
- Algoritmos de cálculo (Rafael Roa).
- Relatividad aditiva y números enteros (José Luis González).
- Fracciones en el currículo de la Educación Primaria (Encarnación Castro y Manuel Torralbo).
- Números decimales (Enrique Castro).
- Números irracionales. Raíces y potencias. Notación científica (Luis C. Contreras y José Carrillo).
- Introducción a la Geometría (M.ª Jesús Cañizares y Luis Serrano).
- Elementos geométricos y formas planas (Luis Serrano).
- Elementos geométricos y formas espaciales (M.ª Jesús Cañizares).
- Transformaciones geométricas (José Carrillo y Luis C. Contreras).
- Números y formas (Francisco Ruiz).
- Introducción a las magnitudes y la medida. Longitud, masa, amplitud, tiempo (Antonio Frías, Francisco Gil y M.ª Francisca Moreno).
- Área y volumen (M.ª Francisca Moreno, Francisco Gil y Antonio Frías).
- Proporcionalidad entre magnitudes (Francisco Fernández García).
- Análisis exploratorio de datos (Angustias Vallecillos).
- Probabilidad (Pilar Azcárate y José M.ª Cardeñoso).

RINCÓN MATEMÁTICO.
UNA EXPERIENCIA PARA
ATENDER A LA DIVERSIDAD
Lucía Morales Rufo (Coordinadora)
Consejería de Educación
de la Comunidad de Madrid
Madrid, 2002
ISBN: 84-699-7671-0
112 páginas

Con motivo de la celebración del Año Mundial de las Matemáticas, durante el curso 1999-2000, seis institutos de secundaria y el CPR de Leganés (Madrid) participaron en un proyecto de innovación educativa denominado «Rincón Matemático 2000», que pretendía incidir en uno de los objetivos propuestos por la Unión Matemática Internacional: popularizar las Matemáticas.

El libro describe esta experiencia, en la que participaron en torno al medio centenar de profesores y más de mil alumnos, y reproduce los materiales didácticos elaborados para su desarrollo, presentados en diversas secciones: El problema de la semana; Miscelánea matemática: citas, poesías, adivinanzas, chistes y gazapos y curiosidades; Adivina: ¿quién es?; Colaboraciones: ¿sabías?; y Noticias y convocatorias.

SUMA 42
febrero 2003

III Premio Sánchez Vázquez, Nueva Dirección de SUMA, «Universo matemático» premiado

CRÓNICAS

PREMIO Gonzalo Sánchez Vázquez

En la reunión ordinaria de la Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, del día 8 de febrero de 2003, se acordó conceder el «III Premio Gonzalo Sánchez Vázquez» a los valores humanos a los profesores Antonio Aranda Plata y Adelina Flores Medina.

Antonio Aranda Plata

Natural de Córdoba, nacido el 25 de diciembre de 1942.

Padre de 5 hijos (y un nieto) tiene una familia mucho más amplia: la de una gran cantidad de amigos y amigas que lo aprecian y respetan. Y muchos más hijos y nietos: sus alumnos.

Es Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad Complutense de Madrid, desde 1965.

Es catedrático de Bachillerato y, en la actualidad, profesor Titular de Escuela Universitaria en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla.

Su labor docente es muy amplia y vocacional, centrándose en las enseñanzas secundaria y universitaria dentro del ámbito de las matemáticas, con incursiones en la informática.

En la enseñanza secundaria ha ejercido ininterrumpidamente desde octubre de 1966, que comienza como Profesor Interino en el Instituto Ramiro de Maeztu, en Madrid, hasta el 23/11/93 que obtiene por concurso una plaza de Profesor Asociado a tiempo completo (dedicación exclusiva) en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla. Antes ha ejercido su labor profesional en los centros siguientes: además del Instituto Ramiro de Maeztu, ya citado, como profesor Agregado de Matemáticas en el Instituto de Enseñanza Media San Isidoro de Sevilla;

Instituto de Bachillerato Rodrigo Caro de Coria del Río (Sevilla); Instituto Español de Bachillerato de Andorra la Vella; Instituto de Enseñanza Secundaria Isbilya de Sevilla. En los cursos 1968/69 a 1974/75 alterna su trabajo docente en Bachillerato con encargos de curso en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla.

Su labor docente es ejemplar:

En los centros en los que ha ejercido la docencia siempre ha sido un profesor muy querido y apreciado por sus alumnos y compañeros. Se ha preocupado siempre por la renovación y actualización de contenidos y métodos. Éste ha sido –y sigue siendo– el objetivo central en su importante labor de creación e impulsor del movimiento asociativo.

En sus clases de la Facultad ha sido siempre propuesto públicamente por los alumnos como uno de los mejores profesores, consiguiendo el primer premio al mejor profesor en el año 1995. Es uno de los docentes que tiene más ascendencia entre los alumnos; la muestra de ello es que sus tutorías están siempre llenas, con alumnos que aguardan para consultarle.

Y es uno de los profesores más renovadores de la Facultad de Matemáticas: impulsor y profesor del llamado Curso 0 (curso preparatorio de los alumnos que ingresan por primera vez en la Facultad) y promotor, y profesor, de un Curso de Metodología del Álgebra y la Geometría en la Enseñanza Secundaria destinado a aquellos alumnos que manejan la docencia como una opción a su salida profesional. Es de destacar cómo, en esta línea, Antonio Aranda retoma la tradición iniciada por el Profesor Gonzalo Sánchez Vázquez en los años setenta, en la misma Facultad en la que impartió clases de Metodología y era prácticamente la única voz que hablaba de tales temas en dicha Facultad.

En sus clases de la Facultad ha sido siempre propuesto públicamente por los alumnos como uno de los mejores profesores, consiguiendo el primer premio al mejor profesor en el año 1995.

Dentro de sus preocupaciones docentes hay que incluir sus inquietudes en el campo de la renovación didáctica y del asociacionismo del profesorado.

Es miembro fundador del Colectivo de Didáctica de las Matemáticas, grupo de renovación incardinado en los movimientos de renovación pedagógica de finales de los años setenta y comienzo de los ochenta. Participa, como miembro de dicho colectivo, en la reunión que tiene lugar en Sevilla (diciembre de 1980), con otros Grupos (Zero de Barcelona, Gamma –luego Azarquiel– de Madrid, el Colectivo Leonés, el Grupo de Didáctica de las Matemáticas de Cantabria y otros) y la Sociedad Canaria. En dicha reunión se tomaron dos acuerdos que marcarían el rumbo de los movimientos asociativos en matemáticas: por un lado, aceptar el ofrecimiento del ICE de La Universidad Autónoma de Barcelona de organizar unas Primeras Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, y, en segundo lugar, continuar en contacto (a través de reuniones periódicas) para promover la renovación en la enseñanza de las Matemáticas, lo que sería el germen de la actual Federación.

Antonio Aranda es, pues, uno de los creadores e impulsores de nuestras actuales JAEM. Pero, además, participa en una reunión informal en Madrid, en septiembre de 1983, como representante de la Thales y con representantes de la Sociedad Isaac Newton y de la Sociedad Aragonesa para impulsar la Federación de Profesores. Fue el primer intento para la creación de nuestra Federación y ahí estuvo Antonio Aranda.

Es miembro del grupo gestor de la Sociedad Thales y socio fundador de la misma. En la Asamblea constituyente de dicha sociedad, en noviembre de 1981, el profesor Aranda es nombrado secretario general de la Sociedad Thales de Profesores de Matemáticas, trabajando estrechamente con D. Gonzalo Sánchez Vázquez, nombrado en esa misma asamblea presidente de dicha asociación.

La primera tarea que encabeza como secretario de la Sociedad es doble en el sentido de la consolidación del movimiento asociativo: por un lado, afianzamiento de las JAEM, para lo que se acoge bajo el auspicio de la Thales, a la segunda edición de dichas jornadas (Sevilla, abril de 1982). Por otro, afianzamiento de la naciente Sociedad Thales: la propia organización de dichas Jornadas, aparte de una ingente tarea organizativa, redundaría, como así fue, en la consolidación de la sociedad de la que era secretario.

En el año 1983 marcha en Comisión de Servicios al Instituto Español de Andorra. A la vuelta se incorpora a las tareas asociativas; primero, como presidente provincial en Sevilla de la Sociedad Thales (organizando en esta ciudad las VI Jornadas bienales de la Sociedad) y, posteriormente, en 1997, nuevamente como Secretario General de la misma. En medio, desarrolla una extraordinaria labor como responsable del área científica del Comité Organizador del VIII Congreso Internacional de Educación Matemática (Sevilla, julio 1996), pero, sobre todo, como el principal elemento dinamizador del citado Comité por sus cualidades humanas (algo imprescindible en un amplísimo Comité que habría de organizar un evento para 4000 personas venidas de más de 100 países).

Forma parte del Comité de la sección española de ICMI en representación de la FESPM.

Es uno de los promotores de los Cursos a Distancia (a través de Internet) organizado por la Sociedad Thales que han tenido un fuerte impacto en la comunidad educativa andaluza.

En el año 2000 deja la Secretaría de la Sociedad y pasa a ocupar una vocalía en la Junta Directiva Provincial de la Sociedad Thales en Sevilla, en la que sigue siendo una persona muy activa y de referencia para las nuevas generaciones.

[Antonio Aranda] desarrolla una extraordinaria labor como responsable del área científica del Comité Organizador del VIII Congreso Internacional de Educación Matemática, pero, sobre todo, como el principal elemento dinamizador del citado Comité por sus cualidades humanas…

Adelina Flores Medina

Nace en Telde (Gran Canaria) el 1 de mayo de 1939. Cursa el Bachillerato y Preuniversitario en el colegio de las Teresianas de Las Palmas. Hija y nieta de farmacéutico sigue la tradición familiar y comienza la Licenciatura en Farmacia (Selectivo en La Laguna y 2.° y 3.° de Farmacia en la Complutense de Madrid). Al finalizar el tercer curso, ingresa en la Congregación de Dominicas Misioneras de La Sagrada Familia, única de fundación canaria cuya dedicación es la enseñanza. A causa de una ley de 1960 que prohibía ejercer la docencia a los farmacéuticos se ve obligada a cambiar de carrera y elige Ciencias Biológicas, que cursa igualmente en la Complutense. Compatibiliza sus estudios con el trabajo como secretaria y responsable de piso del Colegio Mayor Santa M.ª del Pino (donde había residido en sus años de estudiante de Farmacia).

Termina la carrera en 1967 y la destinan a Canarias donde pone en marcha y dirige el Colegio Universitario Femenino Santa M.ª del Pino de La Laguna (Tenerife). A la vez comienza su quehacer docente como profesora de Ciencias en Bachillerato y Preuniversitario en el Colegio Santa Rosa de Lima de dicha Ciudad. En estos años forma parte de la Junta de Gobierno del Colegio de Doctores y Licenciados. En los veranos asiste en la Universidad de Navarra a cuatro cursos relacionados con la práctica docente (Didáctica Aplicada, Sistemas y Técnicas Educativas y Equipos de Dirección) impartidos por el único Instituto de Ciencias de la Educación que existía en ese momento en España. En 1968 la Congregación de Dominicas hace un planteamiento renovador del sistema educativo de sus colegios, e implantan, anticipándose en el tiempo, la enseñanza individualizada. Con este motivo, colabora y participa en la elaboración del Proyecto Educativo de los Centros de la Congregación, trabajando con otras profesoras de la misma, en el diseño de las líneas pedagógicas y filosofía educativa de dicho proyecto, en una época en la que a nivel oficial estatal no existía este planteamiento.

En 1970 es destinada a Santa Cruz de La Palma donde continúa su labor docente impartiendo clases de Biología y Matemáticas de Bachillerato en el Colegio Santo Domingo Guzmán. Paralelamente a su trabajo en el colegio de La Palmita inicia su andadura en el campo de la alfabetización organizando en los barrios marginales de dicha capital (especialmente en la Barriada del Pilar) un Proyecto de Alfabetización de Adultos y Ancianos, para lo cual elabora un Método de Alfabetización basado fundamentalmente en la «Pedagogía del Oprimido» de Paulo Freire, adaptándolo a la realidad concreta de la mujer y el hombre de Canarias. Desde varios lugares de las islas, grupos con compromisos de inserción en el mundo obrero, y grupos de alumnos cristianos de la Universidad de La Laguna le solicitan que transmita este proyecto a través de cursos de Educación Liberadora y Cultura Popular. Se realizaron en Las Palmas, Vecindario, Teror, Santa Cruz de Tenerife, San Juan de La Rambla y La Laguna.

También en La Palma, organiza cursos de Promoción de la Mujer y de Actualización Didáctica de Profesores de EGB, especialmente sensibilizados en la mejora de su actividad docente, así como cursos y jornadas a padres y madres de alumnos (Llanos de Aridane, San José de Breña Baja y Santa Cruz de La Palma).

En los veranos, y como consecuencia de la necesidad que se planteaba en su Congregación de ofrecer una cultura básica a las hermanas que habían ingresado en la misma sin estudios, organiza cursos de Cultura General en Teror. Elabora, para los mismos, un material pedagógico y didáctico adaptado a personas adultas.

En 1971 con motivo de la erupción del volcán Teneguía en Fuencaliente participa activamente en la evacuación de los damnificados de Las Manchas y en la atención a los mismos.

En 1973 abandona su compromiso con la Congregación de Dominicas y decide dedicarse al mundo de los menos favorecidos desde la enseñanza pública. Al hacer, con otra compañera, una opción por el trabajo en zonas de especial necesidad y al no existir Centros de Enseñanza Media en las mismas, por estar situados en zonas urbanas, decide dedicarse al nivel educativo de la Enseñanza General Básica, lo cual posibilitaba su inserción en el mundo rural de Canarias. Aprueba el concurso-oposición al Cuerpo Especial de Profesores de EGB y tiene su primer destino en Tacoronte donde la Inspección Educativa le encomienda el montaje del Colegio Público «M.ª Rosa Alonso» que fue el primer centro de 22 unidades de la provincia de Tenerife. En dicho centro da clases de Matemáticas y Ciencias Naturales en Segunda Etapa, monta los laboratorios e imparte cursos de Montaje y Prácticas de Laboratorio para el profesorado de dicha etapa en Tenerife. También colabora con la Inspección Educativa en los Cursos de Actualización Didáctica del Profesorado, especialmente sobre elaboración de material didáctico.

Allí sigue trabajando con su Proyecto de Alfabetización de Adultos, ampliándolo al mundo de los enfermos, algunos terminales.

En 1975 obtiene su primer destino como propietaria provisional en El Valle de San Lorenzo (Arona), donde continúa como profesora de Matemáticas y Ciencias Naturales en 2.ª etapa. Allí sigue trabajando con su Proyecto de Alfabetización de Adultos, ampliándolo al mundo de los enfermos, algunos terminales. (Con su método Freire enseña a leer a una joven mujer aquejada de cáncer, teniendo que acostarse en su cama como única forma de hacerle visible la lectura).

En 1977, con motivo del concurso de traslados para su destino definitivo, solicita en primer lugar la Escuela Graduada mixta de La Gavia (Telde) donde permanece 23 años (19 dedicada a la enseñanza en el Ciclo Medio y, los 4 últimos, a alumnos con Necesidades Educativas Especiales) siendo a la vez Directora de la misma y desde donde se jubila en el año 2000. En este barrio fija su residencia, y a petición de los vecinos, crea la Asociación de Vecinos de la que será su secretaria durante 20 años. Su labor docente está entrelazada con ser voz de los que no la tienen. Consigue el agua corriente, alumbrado público y doméstico, las carreteras de acceso al barrio e interiores, transporte público (SALCAI), recogida de basura, red de alcantarillado, cédulas de habitabilidad de casas de autoconstrucción y cuevas, pensiones, ayudas a minusvalías, teléfono, plaza para el barrio y el tan ansiado y soñado local social, lugar de acontecimientos culturales, de ocio y festivos del barrio.

A su llegada a La Gavia, la escuela contaba con dos aulas en estado deprimente y situadas en diferentes lugares del barranco. Tanto el acceso a las mismas, como la comunicación entre ambas, se realizaba por veredas muy difíciles de transitar. Una de ellas no tenía patio de recreo y la otra contaba sólo con un pequeño barrizal de 11 metros cuadrados que no se podía utilizar en los abundantes días de lluvia de entonces. La situación de la escuela, sin protección en su parte frontal, la que daba al barranco, y con derrumbamientos de grandes piedras y barro en la posterior, junto a la ladera, hizo que emprendiera una lucha incansable y continuada para conseguir, primero reunir a todos los alumnos que estaban disgregados y luego crear un espacio digno como recinto escolar. Al jubilarse deja el actual colegio con carretera de acceso, cinco aulas, dos patios, huertos escolares, porche de protección a la lluvia, dos despachos, recinto para material escolar, muros de protección hacia el barranco y la ladera, abundante dotación bibliográfica y material escolar.

Esta dura, árdua y constante lucha por lograr unas dignas condiciones materiales para poder «aprender a aprender» no le impiden aceptar en 1986 la petición de la Consejería de Educación para formar parte de un grupo de 15 profesores del archipiélago para trabajar durante tres cursos escolares en la Experimentación del Ciclo Medio de la EGB dentro del Proyecto de Reforma del Ciclo Medio de la Comunidad Autónoma de Canarias, coordinado por el Departamento de Pedagogía de la Universidad de La Laguna. Fueron años de intenso trabajo en La Reforma Educativa que le llevan a comunicar sus experiencias dando Jornadas sobre La Globalización en el Ciclo Medio a los Colectivos de Escuelas Rurales de Telde y La Aldea de San Nicolás de Tolentino.

Continúa desde La Gavia impartiendo cursos de Educación Liberadora, Cultura Popular, Metodología y Material Didáctico para adultos, así como Jornadas de Didáctica y creación de material didáctico para Primaria.

En los años noventa forma parte de un proyecto dirigido por una profesora de Educación Infantil del Centro y se crea la Escuela de Padres del Colegio y Los Talleres. Esta experiencia resultó altamente positiva por la amplia participación de los padres y fue expuesta a otros Centros por medio de Jornadas realizadas en los Centros de Profesores de Telde y Las Palmas. A petición de un grupo de padres ayuda en la elaboración de los tramites de creación del APA del colegio.

Una de sus últimas investigaciones sobre material didáctico en matemáticas fue la aplicación de los mini-ábacos, que supusieron en sus manos un sinfín de aplicaciones para la comprensión del sistema de numeración y operaciones, para alumnos de todos los niveles, desde Infantil a Primaria y para los de necesidades educativas especiales. A petición de los CEP de Telde, Santa Lucía y Galdar transmitió esta experiencia a numerosos profesores de sus distritos a través de Jornadas en Arguineguín, Telde, Agaete, Sta. Mª de Guía, Galdar, San Nicolás de Tolentino y al Colectivo de Escuelas Rurales de Telde.

…tiene lugar el acto oficial que permite contemplar, esculpido en piedra de cantería canaria, la denominación del mismo como Colegio Público de Educación Infantil y Primaria Profesora Adelina Flores Medina.

En 1997, el barrio, por medio de un escrito con firmas de todos sus vecinos, solicita que el Colegio lleve su nombre. El 8 de Marzo de 1999, Día de la Mujer Trabajadora, como no era menos de esperar, tiene lugar el acto oficial que permite contemplar, esculpido en piedra de cantería canaria, la denominación del mismo como Colegio Público de Educación Infantil y Primaria Profesora Adelina Flores Medina.

Por motivos de salud se ve obligada a solicitar la jubilación ofertada por la Logse, y muy a pesar suyo, entrega su casita escolar de La Gavia a la Administración y traslada su domicilio a Las Palmas de Gran Canaria. Ha continuado estrechamente ligada a La Gavia y su presencia puntual ante cualquier acontecimiento es la misma de siempre ya que el binomio Adelina-Gavia es inseparable. Como ella siempre dice: La Gavia es mi «lugar en el mundo».

El 31 de marzo de 2001 la Asociación de Vecinos la nombra Hija Adoptiva del Barrio, aunque la placa conmemorativa dice Hija Predilecta de La Gavia.

La Sociedad de Profesores de Matemáticas Isaac Newton sabe de sus participaciones en las Jornadas con su propio material didáctico así como de los valores humanos que la hacen merecedora de ser propuesta para el III Premio «Gonzalo Sánchez Vázquez».

Nueva Dirección de SUMA

Cumplidos dos periodos de la actual Dirección de Suma, y después de la correspondiente convocatoria, en la reunión ordinaria de la Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, del día 8 de febrero de 2003, se acordó por unanimidad nombrar como Directores de Suma para los próximos cuatro años la candidatura presentada conjuntamente por Francisco Martín Casalderrey e Inmaculada Fuentes, de la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo».

Los nuevos directores editarán la revista a partir del número 44 de noviembre del presente año. Aun cuando en el próximo número (junio) dedicaremos más espacio a la «sucesión», de momento deseamos hacer constar a Inmaculada Fuentes y Francisco Martín nuestra más cordial felicitación, nuestro agradecimiento más efusivo (por aquello de la «liberación») así como mostrar nuestra absoluta seguridad de que en sus manos *Suma* va a tomar un empuje inusitado que la va a convertir en una de las revistas sobre educación matemática más significativa de las que se editan internacionalmente.

Francisco Martín Casalderrey

Es Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Zaragoza y profesor de enseñanza secundaria desde 1979. Fue uno de los promotores de la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas de la que fue vicepresidente. Formó parte del comité organizador de las III JAEM. En 1985 se traslada a Madrid para trabajar en el Ministerio de Educación donde formó parte del equipo que puso en marcha el Proyecto Atenea, que se integraría después en el Programa de Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación. En 1989 pasó a ser Consejero Técnico de la Secretaría de Estado de Educación. En estos años participó en la fundación de la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castenuovo» de la que forma parte en la actualidad. A partir de 1991 se reincorpora a la labor docente trabajando entre 1992 y 1998 en el Liceo Cervantes de Roma. Actualmente está destinado en el Instituto «Juan de la Cierva» de Madrid y ejerce como inspector de educación en la Comunidad de Madrid. Ha realizado varios proyectos de innovación educativa, obteniendo por uno de ellos el premio nacional. Ha participado y coordinado proyectos de investigación con la Universidad de Bolonia, la Universidad de Coimbra, el Ministerio de Educación de Irlanda y la Universidad de Tübingen. Su presencia ha sido bastante habitual como conferenciante y ponente en actividades de formación del profesorado. Ha realizado abundantes publicaciones en el ámbito de la historia de las matemáticas, la didáctica de las matemáticas y sobre tecnologías de la información. Su último libro titulado *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento Italiano* apareció en 2000.

Inmaculada Fuentes Gil

Licenciada en Matemáticas por la Universidad Complutense de Madrid. Profesora de enseñanza secundaria, ha ejercido su labor docente en distintos Institutos de Madrid y está destinada actualmente en el IES «Ágora» de Alcobendas (Madrid).

Forma parte del grupo Azarquiel de Mátemáticas de Madrid desde 1980, con el que ha realizado diferentes proyectos de investigación educativa. Su perfil de profesora-investigadora en didáctica la ha llevado a no dejar el aula, compaginando la docencia con la investigación.

Ha participado en los movimientos de innovación y renovación pedagógica asistiendo y actuando como ponente en numerosos Congresos y Jornadas relacionadas con la Enseñanza de las Matemáticas, así como impartiendo cursos dirigidos a profesores de Matemáticas.

Es miembro, desde su fundación, de la Sociedad de Profesores de Matemáticas Emma Castelnuovo.

La serie «Universo matemático» premiada en Pekín

«Universo matemático», serie producida con motivo del Año Mundial de las Matemáticas, por el programa de la televisión educativa de TVE «la aventura del saber», realizada por Ana Martínez, con guión y presentación de Antonio Pérez Sanz, ha sido galardonada en el Festival Internacional de Documentales Científicos de Pekín, con el Premio Especial del Jurado. Los premios se fallaron el pasado 11 de diciembre en la capital china.

A este Festival Internacional, con carácter bienal, concurren las producciones científicas de las más prestigiosas cadenas de televisión de Asia, Europa, EE.UU. y Australia. El jurado está formado por especialistas de Japón, Australia, China, Francia, Reino Unido y EE.UU.

El premio lo ha obtenido el primer programa de la serie titulado *Pitágoras: mucho más que un teorema* por «sus meritorios valores y por su creatividad». El jurado resaltó el hecho de que «con una producción tan sencilla lograba tan alta calidad en la explicación para el público general de un tema matemático y científico».

«Universo matemático» es una serie de 10 programas de 24 minutos cada uno, cuyo contenido trata de las grandes ideas matemáticas y de los matemáticos que las han descubierto. La serie se emitió a lo largo del año 2000 y 2001 en TV2 y en el Canal Internacional en el programa «La Aventura del saber» y en el Canal Temático Grandes Documentales (Hispavisión) de TVE.

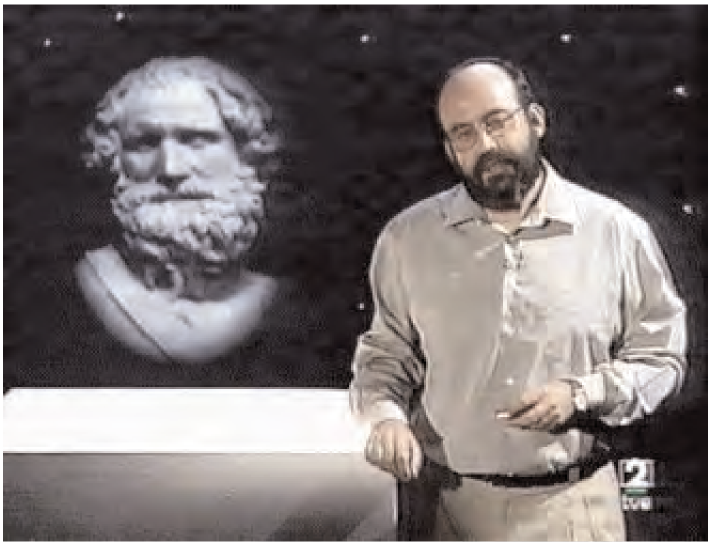
Los programas están concebidos como un viaje organizado para el espectador, con excursiones en el tiempo y en el espacio para perseguir las grandes ideas matemáticas y visitar a los personajes que las han producido en el contexto histórico y cultural en el que nacen y se desarrollan.

A lo largo de la serie asistimos a la colocación de las primeras piedras del magnífico edificio matemático, a cargo de los pitagóricos. Descubrimos también la herencia matemática que nos legaron los egipcios y los babilonios, las increíbles aventuras de un número tan popular como ≠ a lo largo de la historia desde Arquímedes hasta Ramanujan y la evolución, muchas veces sorprendente, de las cifras desde las culturas más remotas hasta nuestros días.

Conocemos a algunos de los arquitectos que pusieron los cimientos e hicieron elevarse las paredes de esta catedral de la inteligencia, así visitamos y vemos trabajar a Fermat, el genio de los números, a Gauss el príncipe de los matemáticos, al prolífico y genial Euler y a los padres del cálculo diferencial e integral, Newton y Leibniz, siendo testigos privilegiados de la polémica más famosa de la historia de las matemáticas. Somos testigos también de las aventuras y desventuras de los matemáticos en la Revolución Francesa y exploramos la presencia de las mujeres matemáticas a lo largo de más de dos milenios. No sólo conoceremos a los personajes sino que nos detendremos también en mirar los materiales matemáticos que utilizaban y los numerosos avatares a lo largo de la construcción del Universo Matemático.

Los títulos de los programas son:

- Pitágoras: mucho más que un teorema.
- Historias de PI.
- Números y cifras: un viaje en el tiempo.
- Fermat: el margen más famoso de la historia.
- Gauss: el príncipe de los Matemáticos.
- Euler: el genio más prolífico.



- Newton y Leibniz: sobre hombros de gigantes.
- Las Matemáticas en la Revolución Francesa.
- Mujeres Matemáticas.
- Orden y Caos. La búsqueda de un sueño.

Para una información más detallada de los programas se puede consulta la dirección de Internet:

http://platea.cnice.mecd.es/~aperez4

Es interesante destacar el hecho de que el premio lo ha obtenido un programa de divulgación matemática en competición con documentales de todas las categorías del certamen: medioambiente, divulgación científica, infantil, largometrajes, geografía, medicina... Lo que viene a demostrar que los contenidos matemáticos también pueden ser divulgados en televisión y atraer e interesar a un público muy amplio.

Desde SUMA nos congratulamos de este premio concedido a TVE, por lo que supone de reconocimiento hacia su incipiente labor de divulgación matemática, que esperamos que anime a sus dirigentes a insistir en ella y que en una próxima crónica, con motivo de otro premio, podamos sustituir el adjetivo «incipiente» por el de «ingente» (que también empieza por *in*).

Pero como lo que más feliz hace son los éxitos más cercanos, constituye un placer felicitar al guionista y presentador de la serie (también de la anterior «Más por menos», que no sabemos si tuvo algún premio, pero lo merecía), Antonio Pérez Sanz, Vocal de Prensa de la Federación y colaborador incansable de nuestra revista, a través de artículos, crónicas y, en los últimos años, como coordinador y autor del rincón «Recursos en Internet».

Antonio, felicidades, gracias por deleitarnos con tus creativos trabajos, y por favor… sigue.

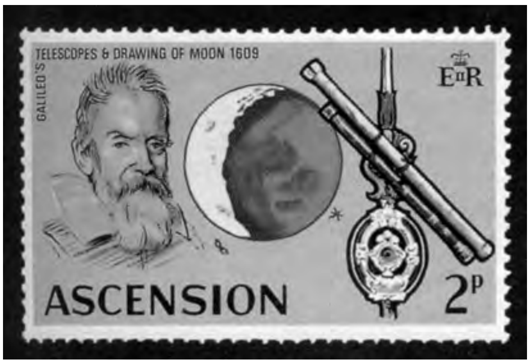

CORREOS
17
ESPAÑA
AL-ZARQALI


EIIR
TYCHO'S STAR
CASSIOPEIA
TYCHO BRAHE'S OBSERVATORY, QUADRANT & SUPERNOVA OF 1572
ASCENSION 1½p


NICOLÁS COPÉRNICO
1473 1973
SISTEMA COSMOLOGICO
VENEZUELA 0,05
NICOLÁS COPÉRNICO
1473 1973
VENEZUELA 0,10
NICOLÁS COPÉRNICO
1473 1973
DE REVOLUTIONIBUS ORBIUM COELESTIUM
VENEZUELA 0,15


1548-1600
Джордано Бруно
180 ЛВ
поща БЪЛГАРИЯ BULGARIA
1998


MAGYAR POSTA
1Ft
Johannes
Kepler
1571-1630


GALILEO'S TELESCOPES & DRAWING OF MOON 1609
EIIR
ASCENSION
2p

SUMA 42
febrero 2003

Actividades de la Federación: Olimpiada, JAEM

CONVOCATORIAS

XIV OLIMPIADA Matemática Nacional de la FESPM

Del 25 al 29 junio del 2003 se celebrará en La Rioja la XIV Olimpiada Matemática Nacional, dirigida a estudiantes de 2.° de Educación Secundaria Obligatoria, convocada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y organizadas, en esta edición, por la Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas «A prima».

Objetivos

- Fomentar entre los estudiantes el gusto por las Matemáticas, así como presentar una visión de las mismas complementaria y más realista que la utilizada en el aula.
- Ofrecer a los alumnos la oportunidad de disfrutar con la resolución de problemas matemáticos en los que se requiere el uso de diversas estrategias de pensamiento.
- Contribuir a la mejora de la enseñanza y del aprendizaje de las Matemáticas en la escuela.
- Apoyar la innovación entre el profesorado en la forma de hacer Matemáticas.
- Propiciar la participación masiva de estudiantes y profesores en las fases previas al encuentro nacional, de acuerdo con los objetivos propuestos en los estatutos de la Federación.
- Fomentar el espíritu cooperativo, potenciando la participación en equipo.
- Favorecer las relaciones de amistad y conocimiento entre jóvenes de diversas comunidades autónomas.
- Dar a conocer al alumnado participante, así como al profesorado acompañante, las singularidades culturales, geográficas y humanas de La Rioja.

PROGRAMA DE ACTIVIDADES

Miércoles, 25 de junio

De 17h a 21h. Recepción de participantes en el IES La Laboral.
21h 30m: Cena.
22h 30m: Acto de bienvenida. Normas y programa de la Olimpíada.
24h: Alojamiento en la Residencia del IES La Laboral.
Reunión del equipo organizador con los colaboradores y coordinadores.

Jueves, 26 de junio

9h: Desayuno.
10h 30m: Pruebas individuales en la Universidad de La Rioja. Almuerzo.
13h 30m: Bienvenida del Alcalde de Logroño en el Ayuntamiento.
14h 30 m: Lunch ofrecido por el Ayuntamiento de Logroño.
16h: Tarde de piscina con juegos matemáticos y merienda.
20h: Película y cena.
24h: Alojamiento en la Residencia del IES La Laboral.

Viernes, 27 de junio

9h: Desayuno.
10h : Salida hacia Calahorra.
11h: Prueba por equipos. Almuerzo.
13h 30m: Bienvenida del Alcalde de Calahorra en el Ayuntamiento.
14h 30 m: Comida ofrecida por el Ayuntamiento de Calahorra.
17h: Visita guiada por Calahorra.
20h: Salida hacia Logroño.
21h 30 m: Cena en el IES La Laboral.
22h 30m: Fiesta en La Laboral.
24h: Alojamiento en la Residencia del IES La Laboral.

Sábado, 28 de junio

8h 30m: Desayuno en La Laboral.
9h 15h: Salida hacia Haro.
10h: Visita al Museo del vino de Haro.
12h: Visita a las Bodegas Bilbaínas de denominación de origen Rioja.
14h: Bienvenida del Alcalde de Haro y comida ofrecida por el Ayuntamiento.
16h 30m: Salida hacia Nájera.
17h: Charla matemática en el centro de la Fundación Caja Rioja de Nájera.
19h: Visita a Santa María la Real de Nájera.
21h 30m: Bienvenida de la Alcaldesa de Nájera y cena ofrecida por el Ayuntamiento.
23h 30m: Salida hacia Logroño.
24h: Alojamiento en la Residencia del IES La Laboral.

Domingo, 29 de junio

9h: Desayuno
10h: Charla–conferencia matemática.
11h 30m: Acto de entrega de obsequios y diplomas a todos los participantes.
12h: Clausura de la XIV Olimpíada Matemática Nacional.
13h 30m: Comida de despedida.

PARTICIPANTES

Sociedades pertenecientes de la FESPM

Andalucía	6
Aragón	3
Asturias	3
Canarias	3
Cantabria	3
Castilla–León	3
Castilla–La Mancha	3
Cataluña	3
Extremadura	3
Galicia	3
Madrid	3
Melilla	2
Murcia	3
Navarra	3
Valencia	3

Invitaciones

Principado de Andorra	2
Escuelas españolas en Marruecos	2
País Vasco	2

Sociedad organizadora

La Rioja	6

XI JORNADAS para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas

Las JAEM se han convertido en un lugar para la reflexión, información, debate y búsqueda de soluciones a los retos que plantea el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Son, además, un momento propicio para encontrarse con personas que comparten profesión y deseos de mejorarla, lo que conlleva la creación de contactos y lazos de amistad entre los asistentes.

Las XI JAEM se desarrollarán en Santa Cruz de Tenerife los días 2, 3 y 4 de julio de 2002 y en Las Palmas de Gran Canaria el día 5. Están convocadas por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y organizadas por la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»

Estructura general

Las XI JAEM se organizan en torno a las siguientes actividades:

- Cuatro Conferencias Plenarias
- Siete Núcleos Temáticos que se desarrollan en ponencias. Al finalizar las ponencias de cada núcleo, habrá un debate con todos los ponentes presentes.
- Comunicaciones, centradas preferentemente en los Núcleos Temáticos.
- Talleres.
- Zoco matemático.
- Exposiciones. Se contará con interesantes exhibiciones de temas relacionados con la Educación Matemática.
- Entrega del III Premio Gonzalo Sánchez Vázquez
- Homenaje al Profesorado argentino. Se descubrirá una escultura matemática en recuerdo del profesor Luis A. Santaló.
- Actividades culturales. Se presentará a los asistentes alguna muestra de la cultura canaria.
- Exposición y venta de materiales didácticos por parte de casas comerciales, de la Federación y de las Sociedades Federadas.

Comité de Programas

Luis Balbuena (Presidente)

Concepción García

Juan Antonio García

Margarita Marín

Emilio Palacián

Manuel Pazos

Un hombre solo, una mujer,
así tomados de uno en uno
son como polvo no son nada, no son nada. (J.A.G.)

Traducido a nuestro oficio:
Un enseñante aislado, un equipo pequeño
no puede hacerse oír respecto a los
problemas fundamentales de nuestra enseñanza.

La FESPM, nacida con vocación independiente, con voz propia, como lugar de discusión de ideas, de debate de propuestas entre las diferentes sociedades que le dan alma, corazón y vida, por supuesto a través de sus socios, OS INVITA una vez más a participar activamente en nuestras Jornadas, las de todos aquellos profesores de matemáticas que pensamos que el papel de las matemáticas en la formación de los individuos es importante, pero que vemos que cada vez las condiciones se nos ponen más difíciles: con horarios disminuidos debemos de formar a nuestro alumnado cada vez más diverso en una sociedad que cada vez necesita más formación científica en las personas que la integran.

Las JAEM nos proporcionan un lugar ideal para discutir el presente e imaginar el futuro: para plantear grandes y pequeños debates:

¿Y si cambiasen las estructuras escolares y no los programas?

¿Y si la escuela fuese un lugar protegido, lugar de trabajo, de paz, de igualdad, de laicismo?

¿Y si la sociedad confiase en sus maestros y profesores?

¿Y si ...

Os esperamos.

Florencio Villarroya
Presidente de la FESPM

Como Presidenta de la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas, quiero expresar mi deseo de que la responsabilidad asumida al comprometernos a organizar las XI JAEM se vea compensada por el éxito de las mismas.

Asimismo, nuestro esmero en tratar de conseguir un evento con el máximo nivel profesional se relaciona con la celebración durante el 2003 de los XXV años de la creación de nuestra Sociedad.

Deseamos, además, que les quede un grato recuerdo de su estancia en las islas, no solo por el entorno geográfico, sino por el nivel de relaciones humanas y profesionales que las JAEM siempre propician. Les ofreceremos una muestra del patrimonio cultural de las islas dentro de las actividades que figuran en el programa.

Se está realizando un importante esfuerzo para conseguir ofertas de alojamiento que tengan una alta relación calidad/precio con el fin de que el aspecto económico no sea un elemento disuasorio para compartir estos días con nosotros. En este sentido, el desplazamiento a Gran Canaria, para celebrar allí la última jornada de las JAEM, no supondrá un coste adicional para los congresistas.

Confiamos en que la buena voluntad y el esfuerzo que está realizando el equipo de trabajo creado en torno a las XI JAEM se vean recompensados con una participación importante y que al regresar a sus lugares de origen, lo hagan satisfechos.

Dolores de la Coba
Presidenta de la Sociedad «Isaac Newton»

Conferencias plenarias

- Claudi Alsina. El Teorema del amor. Demostración completa.
- Carmen Azcárate. Profesores de Matemáticas: de matemáticos a profesores.
- Manuel Fernández Reyes. Algunas reflexiones sobre lo que nos queda por hacer.
- Martín Kindt. Una excursión en el paisaje geométrico del pintor Alberto Durero.

Núcleos temáticos

1. Modelizar la realidad

- Miquel Albertí. Pa´Tangke Lumu´: realidad lejana, matemática cercana.
- Pino Caballero. Matemáticas para la Seguridad Cotidiana.
- Josep Gascón. El espacio de las Organizaciones Didácticas posibles en las Instituciones docentes.
- Carlos Usón. Un universo de certezas a la dulce sombra de la regularidad.

2. A vueltas con los números

- David Barba. Los números antes y ahora y el tratamiento de la diversidad... de los docentes.
- María Luz Callejo. Números que dan que pensar.
- Manuel Fernández Caballero. Los otros números.
- Antonio R. Martín Adrián. Los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones aritméticas: ¡Han muerto, pero no han sido enterrados!
- José A. Mora y Salvador Caballero. Calculadora para alumnos con dificultades en Matemáticas.
- Martín M. Socas. Transición del pensamiento numérico al algebraico. Problemas de aprendizaje.

3. La geometría desde diferentes perspectivas

- Menchu Bas. Ver, construir y tocar la Geometría. Utilización didáctica de los materiales.
- Agustín Carrillo de Albornoz. Descubrir la Geometría con la ayuda de las nuevas tecnologías.
- Nuria Gorgorió. Geometría y visualización a lo largo del currículo.
- José Muñoz, Juan A. Hans y Antonio Fernández-Aliseda. Miscelánea geométrica.

4. Estadística y probabilidad: educar para controlar el azar

- José Colera. La azarosa andadura de la enseñanza del azar.
- Andrés Nortes. Tratamiento estadístico en el aula de la realidad diaria.
- Antonio Pérez Jiménez. ¡Al fin puede Pepito aprender probabilidad!
- Marisa Soriano y Emilia Pardo. Matemáticas en la Educación infantil. Una manera de organizarse.

5. El cálculo hoy. Perspectivas de futuro

- Antonio Martinón. La enseñanza del cálculo en la Educación Secundaria.
- Francisco Puerta García. Calculadoras y currículo: de las cuatro reglas al cálculo simbólico.
- Modesto Sierra. De L´Hopital a las nuevas tecnologías: algunos aspectos de la evolución de la enseñanza del Análisis Matemático.
- Pilar Turégano. La integral definida en la Enseñanza Secundaria.

6. Conexiones

- Silvia Margeli y Ángel Alsina. Manipulación e imagen virtual en la clase de matemáticas.
- José L. Montesinos. Las Matemáticas y el Absolutismo Político: Hobbes.
- Ángela Núñez. Aprendizaje de las Matemáticas con «Descartes»: un recurso interactivo en INTERNET.
- Nuria Planas. Identidad y conflicto en el aula de Matemáticas multicultural.
- Covadonga Rodríguez-Moldes. Matemáticas más allá del currículo.
- Adela Salvador. ¿Dónde hay fractales?

7. Problemas no matemáticos del profesorado de Matemáticas

- Manuel Alcalá. Aprender a ser a través de la Educación Matemática.
- Fernando Alonso. La innovación de cada uno.
- Javier Brihuega. La Programación.
- Manuel García Déniz y José A. Rupérez. Esta semana... ¿qué hacemos? Dinamización de las matemáticas en los Centros Educativos.
- Santiago López Arca. Pasaba por aquí y me vi atrapado en la ESO.
- José A. López Varona. Los estudios de evaluación nacionales e internacionales: información sobre el sistema.

Comité Organizador

Luis Balbuena (Presidente)
Inés Plasencia (Secretaria)
Francisco Aguiar (Tesorero)
Pilar Acosta
Sergio Darias
Carlos Duque
Laura Fernández
Emma García Mora
Lourdes Hernández Pérez
Jesús Méndez
Francisco Padilla
Francisco Puerta
Jacinto Quevedo
M.ª Jesús Rodríguez Martín
José A. Rupérez
Arnulfo Santos
Carmen Tavío
Ana Trujillo
Fidela Velázquez

COMUNICACIONES

Consiste en intervenciones de aproximadamente 15 minutos (más 10 de coloquio) en las que se podrá compartir y transmitir a otros compañeros puntos de vista, experiencias de aula, etc. Se regirán por las siguientes normas:

1. Las Comunicaciones deben estar referidas a la enseñanza o el aprendizaje de las Matemáticas en cualquiera de los niveles educativos.
2. Han de encuadrarse en los Núcleos Temáticos propuestos aunque también se ofrece la posibilidad de hacerlas sobre cualquier otro tema.
3. Deben ser inéditas.
4. Si es de varios autores, al menos uno ha de estar inscrito. El certificado en este caso, será colectivo.
5. La admisión de los trabajos quedará supeditada a la decisión del Comité de Programa.
6. El plazo de admisión finaliza el día 1 de abril de 2003.
7. Deberá expresarse con claridad qué tipo de material de apoyo necesita para su exposición (retroproyector para transparencias o de opacos, proyector de diapositivas, vídeo, cañón, ordenador, ordenadores en red, software, etc). Todas las presentaciones informáticas deben venir en formato Power-Point 2000. En otros supuestos, consultar con la Organización.
8. Se dispondrá de 15 minutos para su exposición más 10 de coloquio con los asistentes.
9. Se publicarán en las Actas de las XI JAEM, siempre que se adapten a las condiciones que se especifican en las normas para la publicación.
10. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de una Comunicación.

TALLERES

Según las siguientes normas:

1. Los participantes a las XI JAEM pueden presentar propuestas de realización de Talleres.
2. Quien lo desee, deberá enviar una descripción del Taller, indicando de la manera más detallada posible, el material que debería poner a su disposición el Comité Organizador de las XI JAEM.
3. El plazo de admisión de propuestas finaliza el día 1 de abril de 2003. A continuación, se confirmará a los autores si su propuesta ha sido aceptada por el Comité de Programa y si existe algún problema con el material que ha sido solicitado al Comité Organizador.
4. La descripción de los Talleres aceptados y realizados se publicará en las actas de las XI JAEM. Para preparar este documento, seguir las normas para la publicación.
5. Se ofertan dos posibilidades de tiempo (una o dos horas). La que se elija debe especificarse en la descripción del Taller:

Coordinadores locales

Ana Negrín
Juan Contreras
Candelaria Espinel
Pino Cruz
Juan Cuenca
Consuelo González Luis
Enrique Freaza
Carmen Delia Clemente
Agustín Marrero
Horacio Arencibia
A. Alicia Pérez Hernández
José Antonio Martín Corujo
Asunción Reyes
Carmen Etelia Martín
Genaro Padilla
Lucía Henríquez Rodríguez

ZOCO

El Zoco Matemático pretende ser una oferta que se hace a todos aquellos asistentes que deseen disponer de un espacio físico y horario en el que puedan presentar materiales didácticos, recursos, programas informáticos, pósteres, etc. Se trata, junto con las Comunicaciones y Talleres, de un canal ideal para tomar parte activa en las XI JAEM.

El Comité Organizador tratará de ayudar y orientar a quienes se animen a presentar algo en el Zoco Matemático y para poder atender su solicitud les pedimos que tengan en cuenta las normas siguientes:

1. Quien desee hacer uso del Zoco deberá enviar una descripción de lo que presentará así como una relación detallada del material que lo compone: paneles, tamaño de las piezas que presenta, etc.
2. Ha de indicar con claridad qué desea que la organización ponga a su disposición: mesas, lugar para colgar posters, ordenador, etc.
3. El plazo de admisión de peticiones para el Zoco termina el 1 de abril de 2003. Posteriormente se les comunicará si se ha aceptado su participación y si existe algún problema con las peticiones efectuadas.
4. Se presentará una memoria de lo expuesto en el Zoco para publicarlo en las Actas de las XI JAEM, siempre que se adapten a las condiciones que se especifican en las normas para la publicación establecidas en este documento.
5. Los solicitantes se comprometen a montar y a desmontar su material en el espacio que se le asigne y a estar presentes en el lugar en los momentos que se les indique para que los asistentes puedan dialogar con ellos sobre lo expuesto.
6. Para el transporte hasta la sede de las JAEM de los materiales para exponer en el Zoco, deben ponerse en contacto con el Comité Organizador para informarles sobre la forma de hacerlo y de solicitar ayuda económica.

Normas de publicación en las Actas

La publicación en las Actas de las XI JAEM de Comunicaciones, Talleres y Zoco Matemático está sujeta a la aceptación y cumplimiento de las normas expuestas en la web de las XI JAEM:

www.sinewton.org/xi_jaem

También se puede solicitar al Comité Organizador.

Exposiciones

Durante las Jornadas, permanecerán abiertas diversas exposiciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. En el programa definitivo se detallarán sus contenidos.

La hora de los patrocinadores

Hora reservada en exclusiva, dentro del horario de las JAEM, para que las casas patrocinadoras puedan mostrar a los asistentes sus productos, en la forma que determine cada una de ellas. Se informará pormenorizadamente en el programa definitivo.

Programa de acompañantes

Se está elaborando un programa de acompañantes que se dará a conocer a través de la WEB o de la Secretaría Técnica.

Inscripción, alojamiento y desplazamiento

Las normas para la inscripción figuran en el número 41 de SUMA. Asimismo, y además para todas las cuestiones relacionadas con alojamientos y viajes, dirigirse a la Secretaría Técnica de las XI JAEM.

En la WEB de las XI JAEM se encontrará información actualizada sobre esos temas.

Más información

Comité Organizador

Apartado de correos 329,
38280 La Laguna (Tenerife)
Teléfono 922641061 / Fax 922640037
e-mail: xi_jaem@sinewton.org
página web: www.sinewton.org/xi_jaem

Secretaría Técnica

I.J&Asociados
Cl. Tomás Zerolo, 17
38300 La Orotava (Tenerife)
Tfn.: 922 33 68 15
Fax 922 33 68 16
e-mail: info@ij-asociados.com

XXI Concurso de Resolución de Problemas

Convocado por la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Letras, de acuerdo con las siguientes bases:

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

a) Primer nivel: alumnos de 3.° de ESO.

b) Segundo nivel: alumnos de 4.° de ESO.

c) Tercer nivel: alumnos de 1.° de Bachillerato

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado 7 de junio del 2003 a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del dia 7 de Mayo del 2003, dirigiéndose por carta o por fax al presidente de nuestra Sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela

Departamento de Álgebra

Facultad de Ciencias Matemáticas

28040-Madrid

Fax: 91 394 4662

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2002-2003.

Información sobre los premios ICMI

El Comité Ejecutivo de la International Commission on Mathematical Instruction decidió crear dos premios a la investigación en educación matemática, en su reunión anual del año 2000:

- El Premio Hans Freudenthal, para un programa destacado de investigación en educación matemática en los últimos 10 años,
- El Premio Felix Klein Award, a una vida dedicada con éxito a la investigación en educación matemática.

Estas distinciones consisten en un certificado y una medalla, y estarán acompañadas por una mención. Tendrán un carácter similar al de un grado honorífico concedido por una universidad, y se concederá cada año con numeración impar. En cada ICME, se presentarán las medallas y certificados de los premios concedidos desde el ICME anterior y se entregarán en la Ceremonia de Apertura.

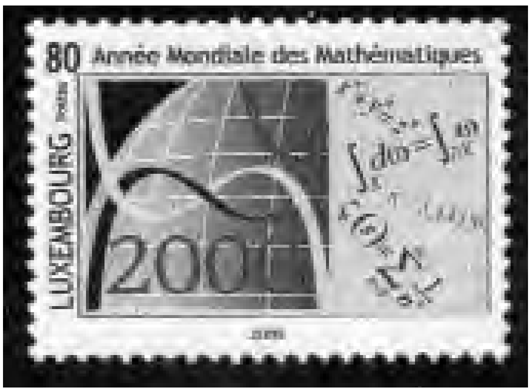
Los primeros galardonados con los premios Freudenthal y Klein, serán dados a conocer al final del año 2003. También se presentarán formalmente en la ceremonia de apertura del congreso ICME 10 en Copenhague.

Un Comité de Elección (CE) de seis personas seleccionará los premiados. Los miembros del CE serán elegidos por el Presidente del ICMI, previa consulta con el Comité Ejecutivo y otros académicos del área. El periodo de servicio es de 8 años no renovables, con tres de los miembros reemplazados cada cuatro años, en ocasión del ICME. Uno de los tres miembros que continúan será nombrado Presidente del Comité. Para iniciar el proceso se nombró un comité de 8 miembros en 2002, tres de ellos con un periodo de servicio de 8 años, el resto por 4 años. Michele Artigue, profesora de la Universidad Paris 7 en Francia, y vicepresidente de ICMI aceptó presidir el Primer Comité de Elección por 4 años. No se darán a conocer los miembros activos del comité, excepto su presidente. El resto de los nombres de miembros del comité se harán públicos al finalizar su periodo de servicio.

Una vez nombrado el CE, trabaja en forma completamente autónoma. Su trabajo y actas son internas y confidenciales, excepto en el proceso obvio de solicitar consejo e información a la comunidad profesional, por parte del presidente del comité. El comité tiene plenas facultades para seleccionar los premiados. Su decisión es definitiva. Una vez hecha, se informará, confidencialmente, al Comité Ejecutivo de ICMI, vía su Presidente.

El CE está abierto a sugerencias respecto a los futuros galardonados. Todas estas sugerencias, que deben ser cuidadosamente apoyadas, deben ser enviadas por correo ordinario al presidente del Comité, antes del final de Junio de 2003 (la dirección se da a continuación).

Michèle Artigue
Presidente del ICMI Awards Committee
IREM, Université Paris 7, Case 7018
2 place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05
France




ПОЧТА СССР
1983
1200 ЛЕТ
Мухаммед аль-Хорезми
EUROPA
ARCHIMEDE
500
ITALIA
I.P.Z.S.-ROMA-1983
5,00
MONACO
DESCARTES René
EUCLID
Rf3
20
$e-k+f=2$
LEONHARD EULER 1707-1783
1983
CARL FRIEDRICH GAUSS
1777
1855
DDR
20
MONACO
4,00
$F = G\frac{mm'}{r^2}$
ENONCE DES LOIS SUR L'ATTRACTION UNIVERSELLE
Sir Isaac Newton
0,50
PASCAL
1623-1662
REPUBLIQUE FRANCAISE
POSTES
EUROPA
С. В. КОВАЛЕВСКАЯ
1500 РУБ.
ROSSIJA
РОСС
100
LEIBNIZ 1646-1716
DEUTSCH
15 PTAS
CORREOS
ESPAÑA
JORGE JUAN
Bertrand Russell
1872-1970
बर्ट्रंड रसल
भारत INDIA
1·45

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.
2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.
3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).
5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.
6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.
7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.
8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.
9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.º 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: …supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: …según Rico (1993).
11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	21 €	10 €
Centros	30 €	10 €
Europa	38,5 €	13,5 €
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP: . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.º______ (3 números)

☐ N.os sueltos:______________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente

Entidad | | | | | Oficina | | | | | DC | | | Cuenta | | | | | | | | | | |

Banco/Caja . . . .
Agencia n.º: . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM