Formação de Formadores em GeoGebra para Cabo Verde, 2016-2017 — Tarefas e resultados

1949 - 2019
OEI - Representação em Portugal

José Manuel Dos Santos Dos Santos

Astrigilda Pires Rocha Silveira

Alexandre Emanuel Batista da Silva Trocado

Titulo:

Formação de Formadores em GeoGebra para Cabo Verde, 2016-2017 — Tarefas e Resultados

Edição:

Organização de Estados Ibero-Americanos para a Educação a Ciência e a Cultura (OEI)— Escritório de Lisboa; José Manuel Dos santos Dos Santos

Autores:

José Manuel Dos Santos Dos Santos

Astrigilda Pires Rocha Silveira

Alexandre Emanuel Batista da Silva Trocado

ISBN: 978-989-54789-0-3

Parceiros:

Apoios:

Agradecimentos

A Organização de Estados Ibero-Americanos para a Educação a Ciência e a Cultura - OEI financiou o projeto de formação de formadores em GeoGebra para Cabo Verde, entre 2016 e 2017 no quadro do Programa Iberciência que contou com o apoio da Junta da Andaluzia. Com a abertura do Escritório da OEI em Portugal, esta iniciativa passou a integrar as atividades desenvolvidas no espaço CPLP e foram criadas condições para a continuação do apoio da OEI ao desenvolvimento em Cabo Verde, de processos de aprendizagem da Matemática suportada pelo software GeoGebra. Em finais de 2019 foi mesmo possível estabelecer uma parceria com a Fundação Calouste Gulbenkian, no âmbito do Programa Parcerias para o Desenvolvimento.

A todas as entidades públicas de Cabo Verde e em especial as delegações concelhias do Ministério da Educação da Praia e de São Vicente que contribuíram para a implementação do projeto até 2017, e que agora abraçam o desenvolvimento do reforço dos objetivos inicialmente traçados para o país, através da Direção Nacional de Educação.

À Universidade de Cabo Verde, sua equipa reitoral, suas unidades orgânicas, aos seus docentes e colaboradores, ao apoio incondicional da Magnifica Reitora, Profª Doutora Judite Nascimento, que contribuíram para todos os resultados obtidos.

A todos os que fora de Cabo Verde garantiram a consultoria cientifica e técnica, nomeadamente, a Profª Doutora Dárida Fernandes, o Prof. Doutor Agustin Carrillo, a Profª Doutora Celina Abar, o Doutor Juan Carlos Toscano.

A todos os professores e estudantes de Cabo Verde que, no âmbito deste projeto, desenvolveram e implementaram as experiências de ensino em suas salas de aula.

Finalmente, endereçamos os nossos agradecimentos a todos os que, de uma forma ou outra, contribuíram para a implementação deste projeto e criação do Instituto GeoGebra na Uni-CV, o nosso muito obrigada por nos terem proporcionado momentos para demostrar a importância e mais-valia da utilização e aplicação das tecnologias informáticas no ensino e aprendizagem da Matemática, especialmente os Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica.

Indice

Introdução

Cabo Verde gradativamente está a caminhar para o uso efetivo das tecnologias informáticas no contexto educativo. A introdução das tecnologias informáticas no contexto educativo é um processo complexo, que exige uma mudança de paradigma e de atitude. Outras competências devem ser adquiridas para a apropriação de uma tecnologia como uma ferramenta pedagógica. Assumindo que as práticas inovadoras promovem o desenvolvimento profissional dos agentes do sistema educativo, idealizou-se o projeto Formação de Formadores em GeoGebra para Cabo Verde com vista a aprofundar as competências matemáticas, didáticas, curriculares e tecnológicas dos professores. Assim, visando a inovação das práticas pedagógicas para a promoção da aprendizagem significativa da Matemática, pretendeu-se capacitar os professores de Matemática para o uso efetivo do GeoGebra, software matemático dinâmico que abrange as quatro grandes áreas da Matemática – a Geometria, a Álgebra, o Cálculo e a Probabilidade e Estatística, de cariz predominantemente construtivista, e constitui um excelente recurso para o estudo da Matemática e de outras áreas.

A possibilidade de o aluno ver, explorar, conjeturar, validar, compreender e comunicar os conceitos geométricos de uma forma interativa e atrativa, encontra no GeoGebra um recurso apropriado e moderno para o estudo da Matemática.

Neste contexto, surge este projeto que contou com o apoio do Instituto GeoGebra de Portugal, o Instituto Politécnico do Porto, a Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto e da Organização de Estados Ibero-americanos, e conseguiu alcançar resultados muito profícuos.

O projeto de formação de formadores em GeoGebra para Cabo Verde visando a instalação do Instituto GeoGebra na Universidade de Cabo Verde (Uni-CV), idealizada pela Vice-Reitora de Extensão Universitária, Profª Doutora Astrigilda Silveira, contou o apoio incondicional do Presidente do Instituto GeoGebra de Portugal, Prof. Doutor José Manuel Dos Santos Dos Santos, para a sua criação e implementação. O mesmo mereceu aprovação da Magnífica Reitora da Uni-CV, Profª Doutora Judite Nascimento, dos demais membros da Equipa Reitoral e do Conselho da Uni-CV (Deliberação nº 19/CONSU/2016).

O projeto foi abraçado pelos Delegados do Ministério de Educação de Cabo Verde, Dr. Adriano Moreno e Dra. Maria Helena Andrade, e Professores dos Ensinos Básico e Secundário dos Concelhos da Praia e do Mindelo, pelo Presidente do ex-IUE, pelo Diretor da Escola do ex-IUE em Mindelo (Dr. Albertino Martins) e por Professores de Matemática da Uni-CV.

A instalação do Instituto GeoGebra na Uni-CV, 9º instituto em África e o 1º num país de Língua Portuguesa desse continente, marcou a história da Educação Matemática em Cabo Verde. Pela primeira vez, em Cabo Verde, conseguiu-se fazer um trabalho cooperativo e colaborativo de tamanha envergadura que reuniu professores de Matemática dos diferentes níveis de Ensino (básico, secundário e superior) das ilhas de Santiago e São Vicente.

Durante o processo de implementação do projeto houve um esforço de muitos intervenientes, sendo todos resultados alcançados graças ao trabalho cooperativo e colaborativo desenvolvido e que culminou no Seminário de Instalação do Instituto GeoGebra na Uni-CV (27 e 28 de julho de 2016) e na celebração do I dia do GeoGebra de Cabo Verde. A Comissão Organizadora do Seminário Final, I dia do GeoGebra de Cabo Verde, foi liderada pela Vice-presidente da Escola de Negócios e Governação, Mestre Abigail Ferreira, e contou com o envolvimento de professores e estudantes da referida Escola, funcionários da Reitoria em São Vicente e da ex-Faculdade de Engenharia e Ciências do Mar, do Gabinete de Comunicação e Imagem (Praia), do

Núcleo de Comunicação e Imagem (São Vicente) e dos Serviços Técnicos. Todo o processo de implementação do projeto foi assegurado pelos Serviços Técnicos e pelo Gabinete de Comunicação e Imagem da Uni-CV. O Doutor Juan Carlos Toscano Grimaldi da Organização de Estados Ibero-americanos, em articulação com os Serviços Técnicos da Uni-CV, garantiu as sessões online através da plataforma Adobe Connect.

O projeto, ainda, contou com a consultora e avaliadora, Profª Doutora Dárida Fernandes, da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto e dos representantes da comunidade de Matemáticos ou Educadores Matemáticos, que usam o GeoGebra, do Brasil e de Espanha, em especial do Presidente do Instituto GeoGebra de Andaluzia, Prof. Doutor Agustin Carrillo e da Presidente do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, Profª Doutora Celina Abar, através da Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo.

O Desenvolvimento deste projeto, numa primeira fase, alicerçou-se num plano de formação de formadores que desenvolveram algum trabalho de divulgação e formação de modo a promover o uso do GeoGebra nos diferentes níveis de ensino. O programa de formação contou com duas sessões presenciais, em dezembro de 2016 e julho de 2017, e duas sessões de formação à distância, que decorreram em fevereiro e março de 2017. Acresce ainda, que a formação programada implicou muito trabalho em Cabo Verde que foi coordenado pela formadora local e assessorado à distância pelo IGP, tendo proporcionado outras iniciativas que permitiram o acompanhamento do IGUni-CV, bem como, o desenvolvimento de outras ações comuns no âmbito educativo e da investigação.

A formação contou com a presença de professores de Matemática do ex-Instituto Universitário de Educação (Escolas de Assomada, Praia e Mindelo) e atual Faculdade de Educação e Desporto da Universidade de Cabo Verde, da Universidade de Cabo Verde da Praia e Mindelo e professores de escolas básicas e secundárias da Praia e do Mindelo. Foi realizado o Seminário para a instalação do Instituto GeoGebra, nos dias 27 e 28 de julho de 2017, e comemorado o Iº Dia de GeoGebra, que marcou a instalação do Instituto GeoGebra na Uni-CV. Este seminário contou com 6 conferências (especialistas nacionais e internacionais), 5 painéis temáticos e 17 comunicações dos artigos produzidos também apresentados numa exposição através de posters. Muitos dos trabalhos produzidos foram publicados em vários números na Revista do Instituto GeoGebra Internacional de S. Paulo, através de artigos e relatos de experiências de aprendizagens. Como consequência, o IGUni-CV foi reconhecido como mais um membro da comunidade que integra o Instituto GeoGebra Internacional, sendo certificados 35 professores, 6 como GeoGebra Users, 25 como GeoGebra Experts e 4 como GeoGebra Trainers.

Nesta publicação são apresentadas: as tarefas usadas nas ações de formação, criadas ou adaptadas pelos editores, dois dos quais integraram a equipa de formação; os posters produzidos pelos formandos, as fichas de trabalho de suporte das experiências realizadas nas escolas; a listagem e os links dos trabalhos produzidos disponíveis on-line na revista atrás mencionada.

Tarefas de Formação

As tarefas para o Projeto de Formação de Formadores em GeoGebra do Instituto GeoGebra na Universidade de Cabo Verde foram organizadas em cinco módulos. Para além de uma primeira introdução ao uso do GeoGebra onde se abordou o uso das folhas Gráficas de cálculo e CAS, os módulos incluíram tarefas para o desenvolvimento de aplicações do GeoGebra no ensino e aprendizagem: da geometria bi e tri dimensional; das funções e modelação matemática; de cálculo vetorial e matricial.

No primeiro módulo, com tarefas monitoradas presencialmente e à distância, pretendeu-se fazer uma introdução ao uso GeoGebra no ensino e aprendizagem da Matemática. O principal objetivo para este módulo foi permitir que os participantes durante a formação pudessem manipular com facilidade a interface de geometria dinâmica, manipulando e realizando aplicações simples do GeoGebra para o ensino de tópicos matemáticos elementares. Ainda neste módulo, na parte que contou com acompanhamento presencial, foram trabalhadas competências básicas que permitiram que os participantes usassem a plataforma online do GeoGebra, em particular o GeoGebra Materials para repositório dos seus trabalhos e o GeoGebra Groups para as interações à distância que seriam estabelecidas com o grupo de formação.

O segundo módulo de formação incluiu tarefas para o desenvolvimento de aplicações do GeoGebra no ensino e aprendizagem da Geometria Bidimensional. Para além da manipulação e exploração de aplicações de geometria no GeoGebra, pretendeu-se discutir/refletir sobre o uso do software para a construção de demonstrações de geometria elementar e a construção de diferentes aplicações com a ferramenta “lugar geométrico” para condução de tarefas de caracter exploratório. Deste modo, pretendeu-se com que as tarefas apresentadas na formação, ou as criadas pelos formandos, promovessem o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo, contemplando na formação a discussão do uso do GeoGebra para este efeito. Neste módulo foram ainda abordados os procedimentos para articular várias aplicações de GeoGebra em livros digitais na plataforma GeoGebra Materials.

As funções reais de variável real, situações de modelação e estatística foram os temas das tarefas do terceiro módulo da formação. Estas tarefas foram construídas de modo a que os participantes pudessem usar as interfaces gráficas em 2D do GeoGebra em intercomunicação com a *Folha Algébrica*, *CAS* e *Folha de Cálculo*. O quarto módulo correspondeu a tarefas realizadas com suporte da *Folha Gráfica 3D* em vários tópicos matemáticos e usando as várias potencialidades do GeoGebra, nomeadamente as capacidades de intercomunicação dos vários outputs gráficos, numéricos e algébricos disponíveis no software.

Durante a implementação do projeto de formação tiveram de ser realizados ajustes, relacionados com os momentos de trabalho presencial ou à distância que se desenvolveu. Um outro fator crucial para estes ajustes foi a necessidade de se atender as solicitações dos participantes, uma vez que, em paralelo às ações de formação, eles definiam as experiências de ensino que conduziam nas suas escolas em Cabo Verde. Assim, as tarefas que apresentamos não se traduzem a nomeação inicial mas sim numeradas conforme a reorganização e os ajustamentos que foram necessários introduzir durante o desenvolvimento do projeto.

Tarefas de introdução ao GeoGebra

Tarefa 1.1 — Intersectar quadrados e triângulos

Esta tarefa pretende que os alunos conduzam uma exploração que lhes permita observar diferentes tipos de polígonos obtidos a partir da intersecção de um quadrado com um triângulo equilátero.
Pretende-se com a tarefa concretizar no tema da Geometria e Medida o propósito principal de ensino, objectivos gerais, tópicos e objectivos específicos abaixo indicados:

Tema

Geometria e Medida

Propósito principal de ensino:

"Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano"(PMEB2007, p. 20)

Objectivos gerais de aprendizagem:

"desenvolver a visualização e ser capazes de representar, descrever e construir figuras no plano e no espaço e de identificar propriedades que as caracterizam; ser capazes de identificar e interpretar relações espaciais;" (PMEB2007, p. 20)

Tópicos:

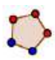
Figuras no plano e sólidos geométricos: propriedades e classificação.

objectivos específicos

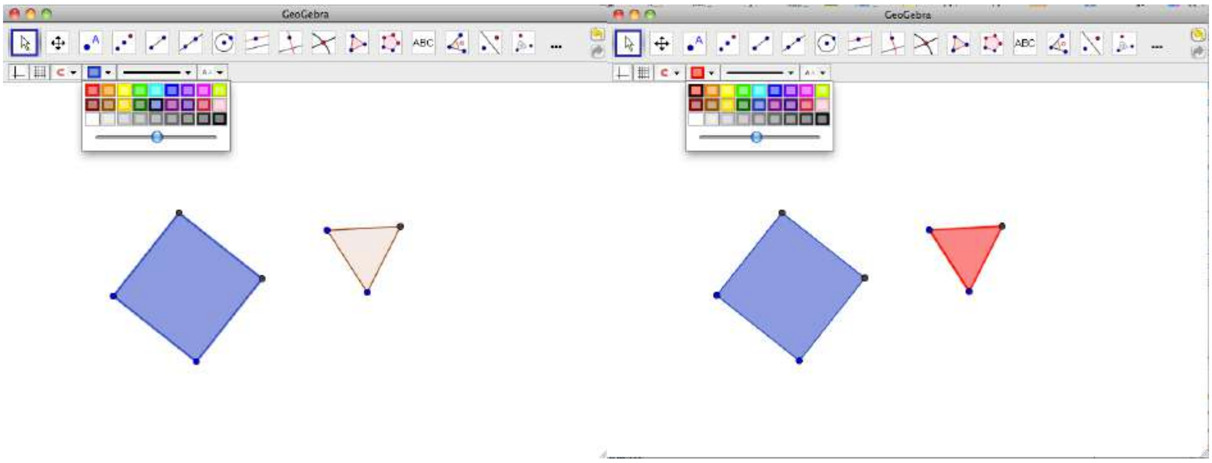
Comparar, transformar e descrever objectos, fazendo classificações e justificando os critérios utilizados. (PMEB2007, p. 22)

Para conduzir a exploração propomos usar o GeoGebra, onde constem apenas as barras de ferramentas e de entrada.

Proposta de guião para a construção e de questões para os alunos

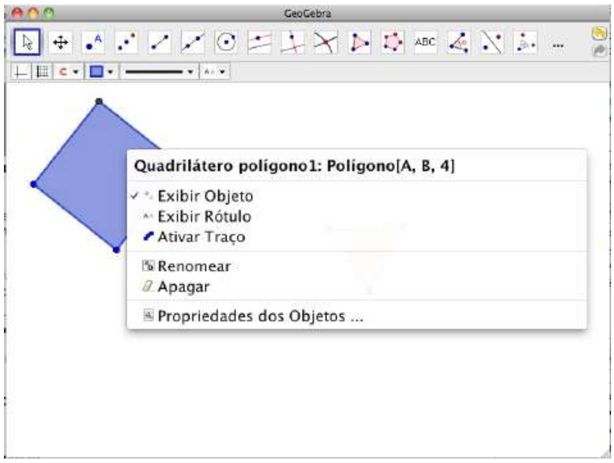
1. Com a ferramenta  polígono regular desenhe um quadrado e um triângulo equilátero.

2. Altere a cor dos polígonos, usando a barra de opções de visualização da *Folha Gráfica*, escolha azul para o quadrado e vermelho para o triângulo.



https://www.geogebra.org/m/bvmb4rfd

3. Seleccione cada um dos polígonos e clicando no botão direito faça renomear os polígonos como *Quadrado* e *Triângulo.*



4. No menu exibir escolha o submenu *Barra de Entrada* e seleccione *Mostrar*
5. Na *Barra de Entrada* escreva:

   Polígono=InterseçãoGeométrica[Quadrado,Triângulo]

   para obter o polígono intersecção.
6. Movimente o quadrado ou o triângulo de modo a obter respostas para as seguintes questões:
   a. O polígono da intersecção pode ser um pentágono?
   b. Qual o número de lados dos polígonos da intersecção?
   c. Em que condições o polígono intersecção é o quadrado azul? E o triângulo vermelho?

Tarefa 1.2 — A cruz que cresce

1. Considere a tarefa abaixo, analise em que anos de escolaridade poderá ser aplicada e como poderia usar o GeoGebra para a desenvolver a tarefa que a seguir se descreve:

A cruz que cresce

Com ajuda de quadrados congruentes de cartolina construiu-se uma sequência de figuras, como a que pode observar nas imagens seguintes:

1ª figura 2ª figura 3ª figura … …

https://www.geogebra.org/m/g4sukrjg

Qual é a imagem que corresponde a quinta figura? Desenha-a no teu caderno.

Poderá ser construída uma imagem desta sequência usando vinte e cinco quadrados congruentes? Explique a sua resposta.

Qual o perímetro de cada uma das figuras tomando como unidade de medida o lado do quadrado?

Quantos quadrados seriam necessários para construir a decima figura da sequência? e a centésima figura da sequência? …

Descreva a um colega que não conheça a sequência geométrica, e que não a possa visualizar, as características comuns a todos os elementos da sequência com excepção do primeiro.

Explique como poderia determinar a área da figura no milésimo termo da sequência, tomando como unidade de medida de área o quadrado. Se necessário elabore uma tabela com a ordem da figura e a medida da área associada a cada termo da sequência.

2. Considere a seguinte sugestão de comandos, a serem introduzidos na *Barra de Entrada*, para elaborar uma aplicação de apoio a tarefa.

n=5

A=(0,0)

B=A+(1,0)

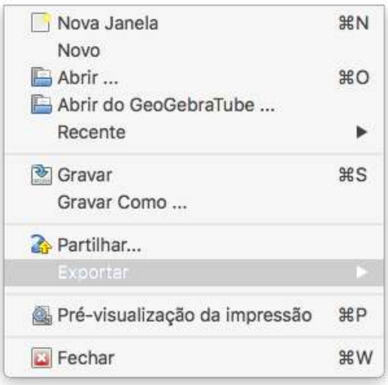
Quadrado=Polígono[A,B,4]

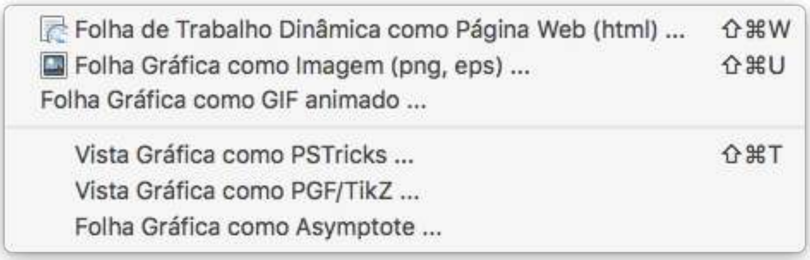
E=Centro[A,C]

F=Centro[A,B]

Cruz=Sequência[Sequência[Rotação[Translação[Quadrado, 2*i*Vector[E, F]], 90° j, E], i, 0, n], j, 1, 4]

3. Vamos redimensionar a janela do GeoGebra. Usando o *Menu Ficheiro*, vamos gravar o ficheiro e exportar a imagem; e exportar a tarefa como página de web no site da plataforma do *GeoGebra Materials*.





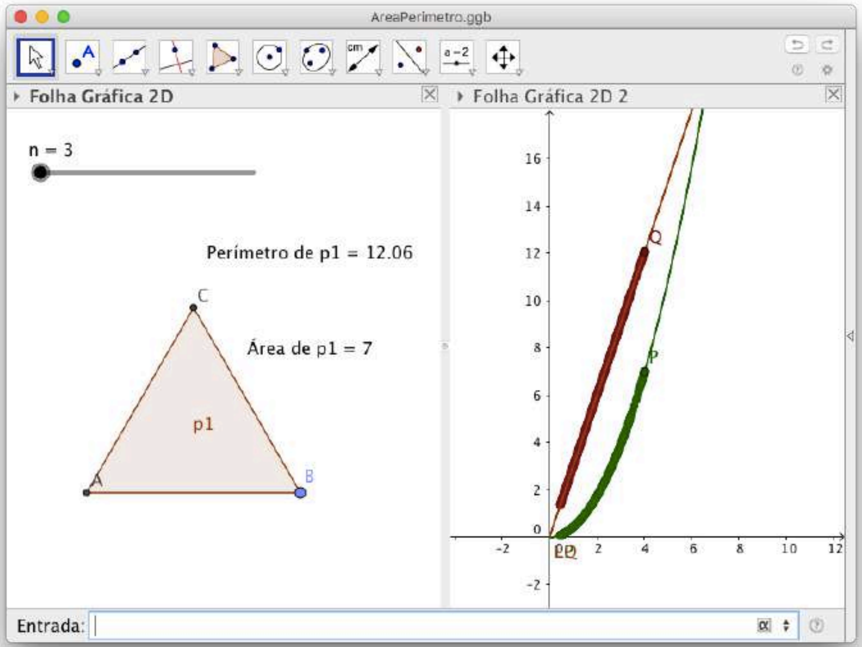
Nota: A aplicação pode também ser partilhada na plataforma GeoGebra, na secção de materiais, com a ferramenta .

Para que este processo funcione é essencial:

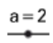
1. a existência do seu perfil na plataforma GeoGebra, pelo que se aconselha o registo prévio;
2. antes de proceder à exportação da aplicação deve assegurar-se que iniciou previamente a sua sessão;
3. a plataforma dará a opção antes de gravar o material, das opções de visibilidade do seu trabalho, que poderá estar privado, partilhado por link, público ou podendo ainda ser colocado num dos seus Grupos da plataforma GeoGebra ou noutro site.

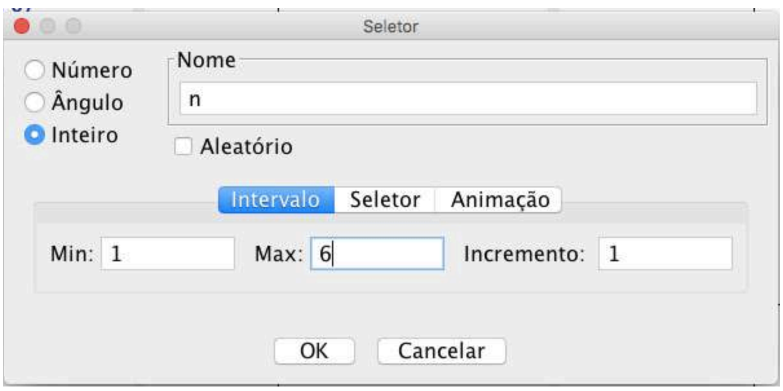
Tarefa 1.3 — Área e Perímetro

Suponha que se pretende estudar a área e perímetro de um polígono regular, de *n* lados, em função da medida do comprimento do seu lado. Para este efeito vamos construir uma aplicação do GeoGebra com duas folhas Gráficas. Na *Folha Gráfica 2D*, , vamos simular o problema geométrico, na *Folha Gráfica 2D* 2, ,vamos representar o seu gráfico, como se pode visualizar na figura seguinte.



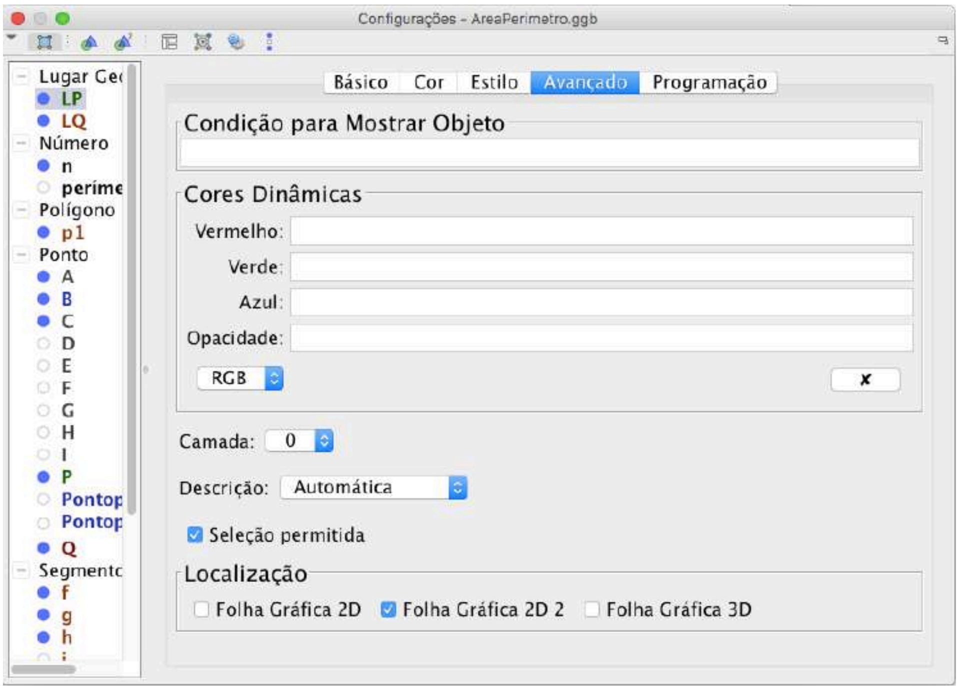
https://www.geogebra.org/m/ypxgynk4

1. Prepare o GeoGebra de modo a exibir as duas folhas gráficas, para isso recorra ao menu *Vista*.
2. Na *Folha Gráfica 2D*, marque o ponto A de coordenadas (0,0) e o ponto B no semi eixo positivo Ox.
3. Usando a *ferramenta seletor*, , construa o parâmetro n, número inteiro, variando entre 1 e 6.



4. De seguida use a *ferramenta poligono regular*, , para construir o polígono de lado [AB] e n lados.

5. Renomeie o polígono com o nome *p1*.
6. Usando a *Barra de Entrada* construa os pontos P e Q tal que:
   6.1. P=(Comprimento[SegmentodeReta[A, B]],Área[p1]);
   6.2. Q=(Comprimento[SegmentodeReta[A, B]], Perímetro[p1]).
7. Mude as propriedades dos pontos P e Q, ativando os traços, , mudando as cores, e no menu avançado faça com que apareçam apenas na *Folha Gráfica 2D 2*.



P*ara alterar as propriedades dos objectos deve utilizar o botão direito do rato de modo a aceder a janela de propriedades do objeto*.

8. Altere a posição do ponto B, movendo o ponto e observe.
9. Para obter os gráficos na sua totalidade, sem mover B, terá de usar a *ferramenta lugar geométrico*, , clicando no ponto P, ou Q, e o ponto B. Em alternativa poderá usar os comandos:
   9.1. LP=Lugar_Geométrico[P, B];
   9.2. LQ=Lugar_Geométrico[Q, B];
10. Use as *ferramentas área* e *perímetro* de modo a mostrar os valores das medidas associadas ao polígono, na *Folha Gráfica 2D*.
11. Finalmente esconda a *Folha Algébrica* e ajuste a janela da aplicação.

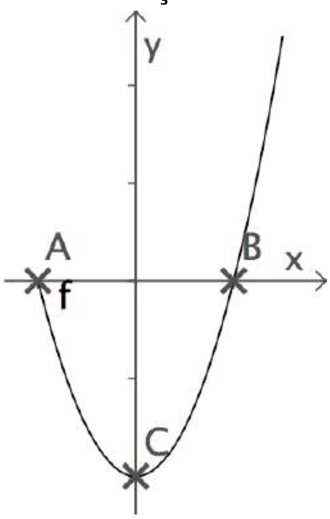
Tarefa 1.4 - Funções Definidas num Intervalo, Propriedades e Tangentes.

Objectivo: Representação gráfica de uma função num intervalo do domínio, algumas propriedades e representação de uma reta tangente. Utilizar o CAS para obter a resolução de equações e o cálculo de diferentes expressões.

Para representarmos uma função definida pela sua expressão analítica num dado Intervalo, basta recorrermos ao comando:

Função[<expressão_da_função>,<x_inicial>,<x_final>]

1. Represente a função definida por $f(x) = x^2 - 4$ no intervalo $[-2,3]$.
   Para representar recorra ao comando: Função[x^2-4, -2, 3]
2. Represente graficamente os zeros da função através da ferramenta ou do comando: Raiz[f]
3. Represente graficamente o mínimo da função através do comando: Extremo[f].



Esconda os pontos anteriores.

4. Represente graficamente as soluções da equação $f(x) = -2$. Para isso, represente graficamente a reta de equação $y = -2$ e determine os pontos de intersecção (D e E) com o gráfico de f através da ferramenta ou através do comando Intersetar[f, a], onde *a* é o nome atribuído à reta pelo GeoGebra.

5. Calcule $f(\sqrt{2})$. Através do comando f(sqrt(2)) poderá observar na janela de álgebra o valor pretendido. Esconda os pontos anteriores e a reta.

6. Marque um ponto qualquer (F) sobre o gráfico de f. Represente a tangente ao gráfico de f que passa por F através do comando Tangente[F, f].

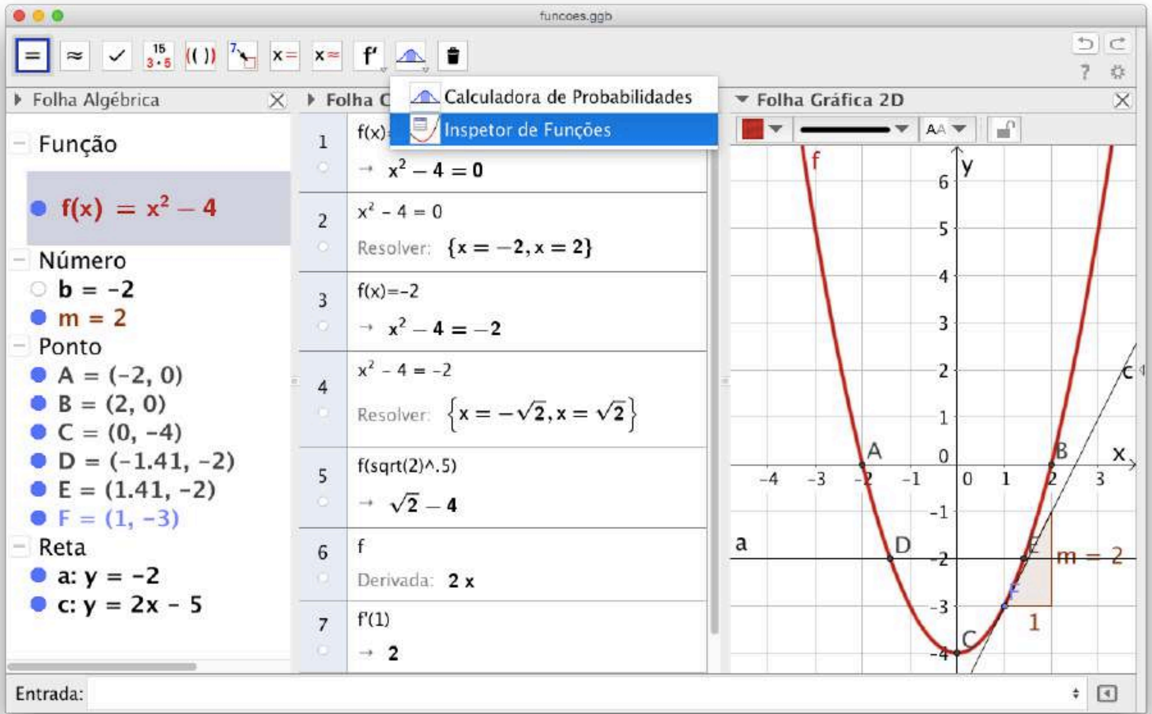
7.Utilize a *ferramenta declive* para obter o declive da tangente no ponto F.

Tarefa 1.4.1. Utilizar o CAS para obter alguns dos resultados anteriores.

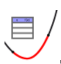
8. No menu vista ative a *Folha CAS*. Observe as diferentes ferramentas vamos utilizar as que abaixo ilustramos:

9. Redefina a função *f*, na *Barra de Entrada*, como *f(x)=x^2-4*.

10. Siga a lista de entradas na janela de CAS que se sugerem na imagem abaixo de modo a confirmar os resultados obtidos anteriormente.

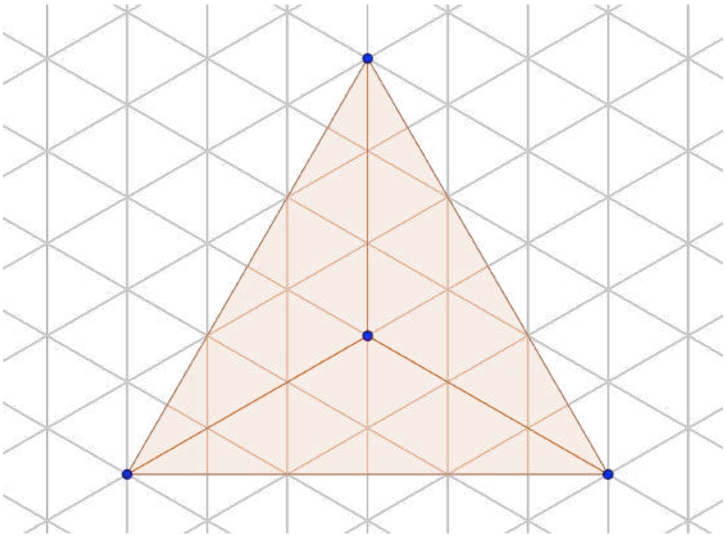


https://www.geogebra.org/m/sv6bryaf

11. Utilize o *inspector de funções* . Explore as suas potencialidades obtendo informação sobre a função.

Tarefas que envolvem transformações isométricas do plano

Tarefa 2.1 — Quais as isometrias que levam um triângulo isósceles gerar um triângulo equilátero?



https://www.geogebra.org/m/vhkywqp4

1. Construção do triângulo isósceles.

    1.1. Construa um lado do triângulo e obtenha o outro lado de igual comprimento por rotação do primeiro de 120º.

    1.2. Construa, recorrendo à *ferramenta de polígono*  , o triângulo isósceles. Designe-o por *TRI.*

2. Introduza na *Barra de Entrada* o comando α=ângulo[120°].

3. Clique com o botão direito do rato sobre o ângulo, definido na *Folha Algébrica*, e seleccione "Mostrar Objecto".

4. Marque um ponto P.

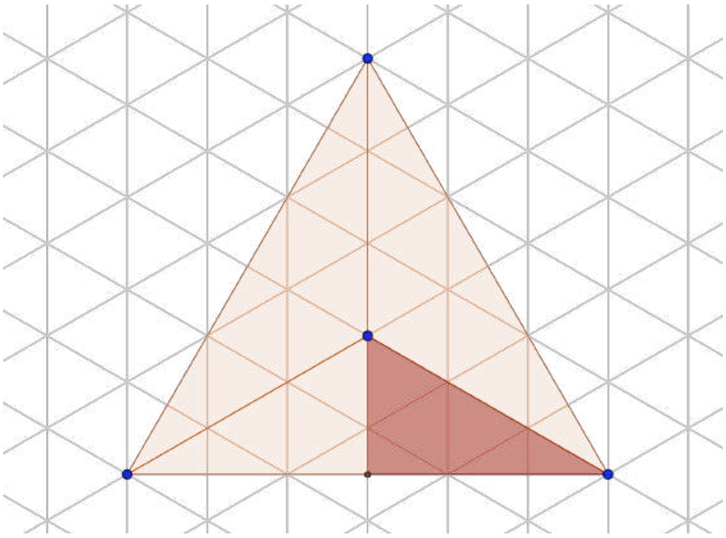
5. Faça uma rotação do triângulo isósceles *TRI* em torno de um ponto P e de ângulo α.

6. Rode a imagem do triângulo novamente de um ângulo α.

7. Ajuste a posição do ponto e o valor do ângulo de modo a obter um triângulo equilátero dividido por três triângulos isósceles congruentes.

8. Experimente usar o comando lista1=Sequência[Rotação[TRI, i*α, P], i, 0, 2] na *Barra de Entrada* e arraste o Ponto P. Analise a sintaxe do comando.

Quais as isometrias que permitem um triângulo escaleno, gerar um triângulo equilátero?



9. Recorra apenas ao uso de reflexões axiais, de modo a gerar um triângulo equilátero, a partir de um triângulo escaleno retângulo com um angulo agudo de um sexto de volta.

Assim verificamos que :

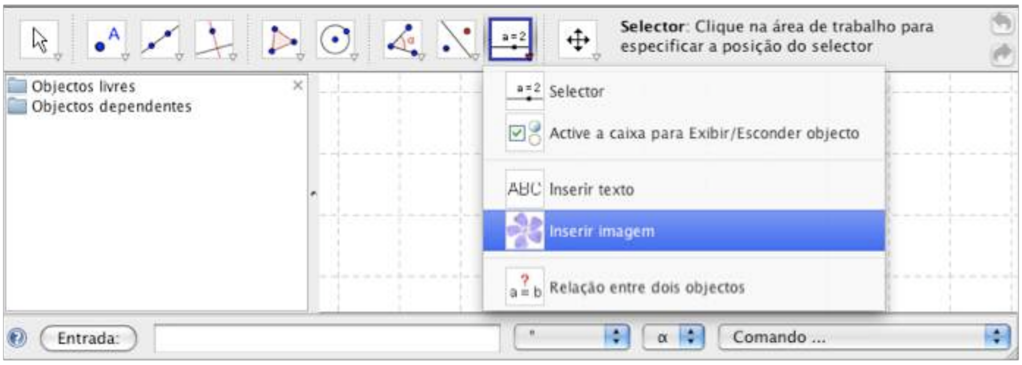
a) no primeiro caso, um triângulo equilátero pode ser gerado como rosácea de ordem três onde a pétala é um triângulo isósceles cujos lados congruentes definem no ponto comum um ângulo de 120º.

b) num segundo caso, um triângulo equilátero pode ser gerado por reflexão em três eixos concorrentes formando ângulos de 120º, dois a dois, de um triângulo escaleno cujos ângulos internos medem 30º, 60º e 90º.

10. Faça um estudo semelhante para a criação de um quadrado a partir de triângulos isósceles ou escalenos. Observe que estudos semelhantes podem ser conduzidos para o estudo das simetrias de polígonos regulares.

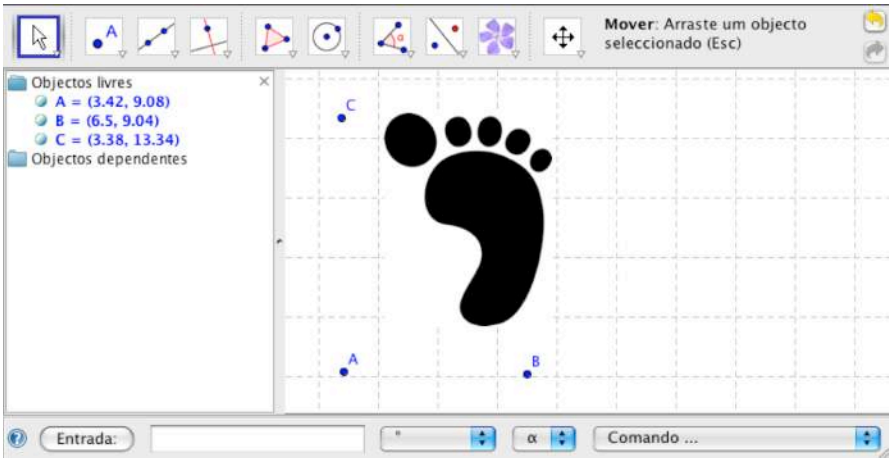
Tarefa 2.2 — Como construir um friso usando as ferramentas, ou modos, do GeoGebra.

1. Abra o programa GeoGebra.



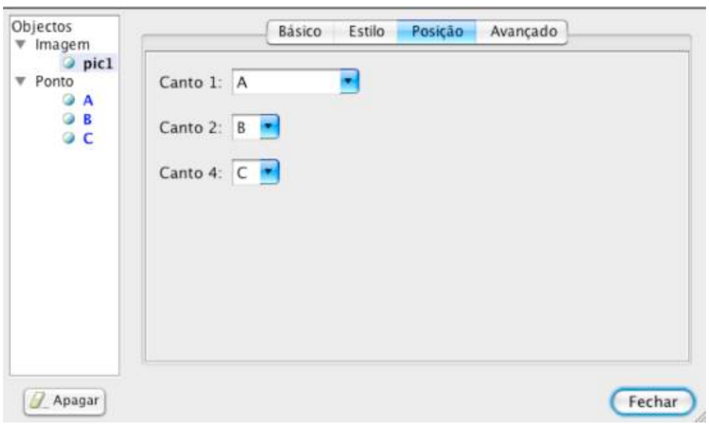
2. Insira a imagem *pe.png, com a ferramenta inserir imagem,* .

3. Recorrendo à ferramenta de criação de pontos, construa três pontos de forma análoga à da figura seguinte.

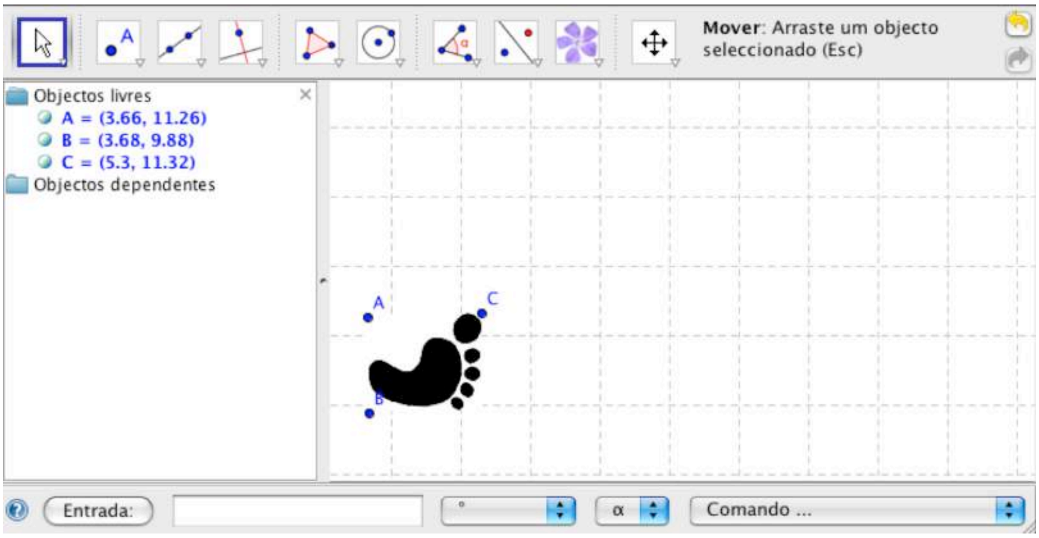


4. Escolha a seta como ferramenta e faça duplo clique na imagem introduzida.

5. Na propriedade *Posição* indique os cantos 1, 2 e 3 da imagem, como sendo os pontos A, B e C, respectivamente.



6. Altere a imagem recorrendo aos pontos A, B e C de forma análoga à apresentada na figura seguinte.



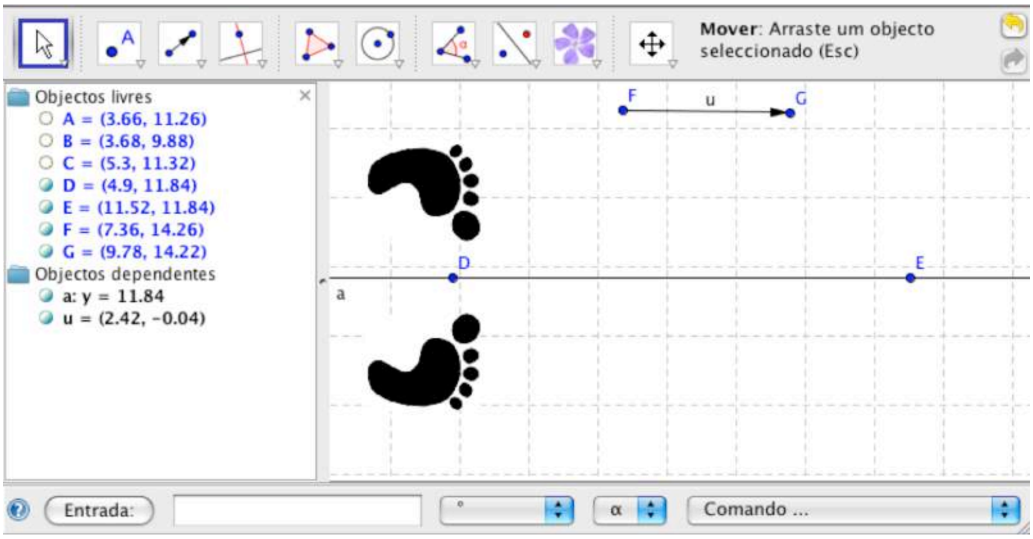
7. Com o botão direito do rato, retire a selecção da opção *Mostrar/Esconder Objeto* para cada um dos pontos.

8. Guarde o ficheiro com o nome isometrias.ggb

9. Recorra à ferramenta  para definir dois pontos e uma recta que passe por eles.

10. Em seguida recorra à ferramenta . Para reflectir a imagem na recta, deve clicar na imagem e na recta que pretende usar como eixo de reflexão.

11. Recorra à ferramenta  para, a partir de dois pontos, definir um vector. Obtenha uma representação semelhante à da figura seguinte:



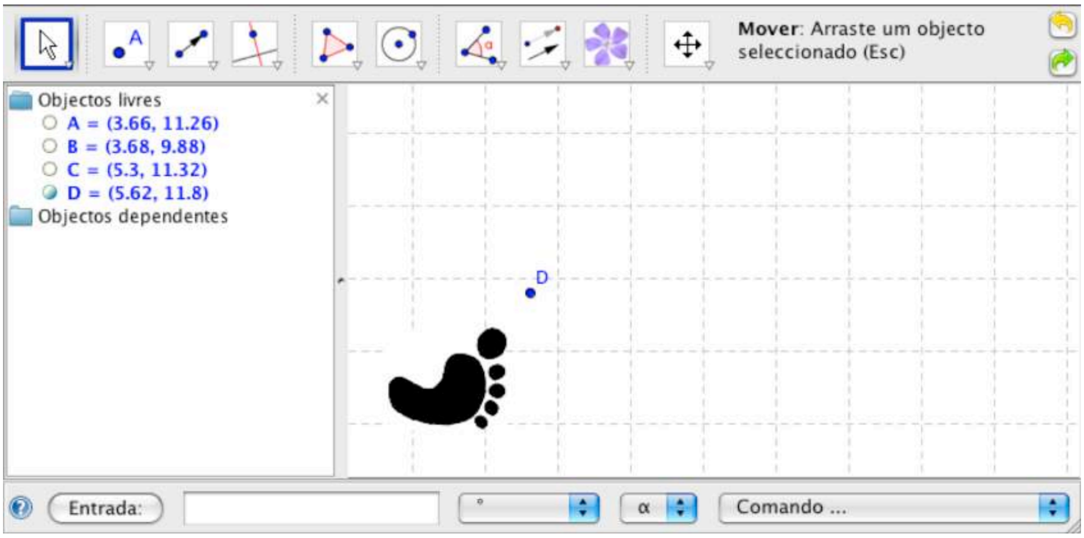
12. Recorra à ferramenta  para fazer a translação das imagens segundo o vector definido no ponto anterior. Clique nas imagens e no vector.

13. Altere a posição dos pontos que definem o vector e a recta para visualizar as modificações no friso.

14. Guarde o ficheiro com o nome *p1m1.ggb*.

15. Abra o ficheiro guardado anteriormente *isometrias.ggb*.

16. Construa um ponto D junto à imagem.



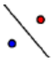
17. Use a ferramenta  para seleccionar o objecto e o centro da rotação. Em seguida, introduza o valor 180º como ângulo de rotação, no sentido anti-horário.

18. Em seguida defina um vector, a partir de dois pontos e faça a translação das imagens anteriores.

19. Altere a posição do ponto D e dos pontos que definem o vector para visualizar as modificações no friso. Guarde o ficheiro com o nome p112.gdb .

Tarefa 2.3 — Como realizar frisos no GeoGebra, usando a linha de comandos.

As ferramentas, ou modos, que atrás foram usados podem traduzir-se em instruções que podem ser dadas nas linhas de comandos:

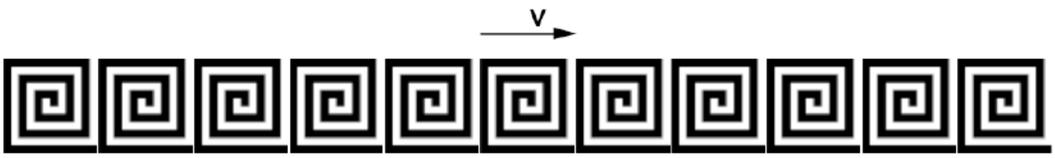
	Marcar um ponto *A*.	A=(0,0)
	Marcar um vector dados dois pontos, *A* e *B*.	v=vector[A,B]
	Reflexão relativa a uma recta *r*.	C=reflexão[A,r]
	Reflexão relativa a um ponto *P*.	D=reflexão[A,P]

A partir do Motivo  in *greca.png .*

1. Importe a imagem do ficheiro greca.png para a *Folha Gráfica 2D*. Pode usar a ferramenta inserir imagem ou simplesmente arrastar a imagem para a *Folha Gráfica 2D*.

2. Usando a *Barra de Entrada*, construa os frisos associados as classes p11, p112 e p1m1. Observe que os comandos constam do quadro abaixo.

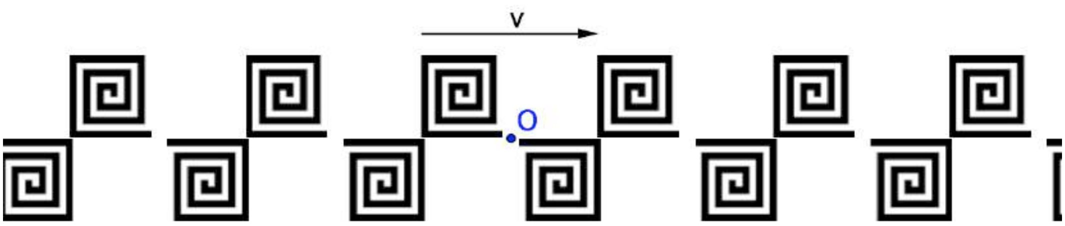
A. p111 – Invariante por translação



Sequência[Translação[Greca,i*v], i, -5, 5]

https://www.geogebra.org/m/xdtewnek

B. p112 – Invariante por meia-volta e translação



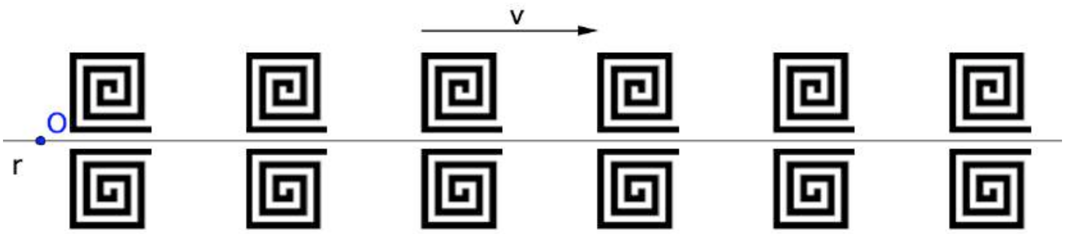
GrecaRO=Reflexão[Greca,O]

Sequência[Translação[Greca,i*v], i, -5, 5]

Sequência[Translação[GrecaRO,i*v], i, -5, 5]

https://www.geogebra.org/m/bgwfbjzz

C. p1m1 – Invariante por reflexão paralela a direcção da translação



r=Recta[O, v]

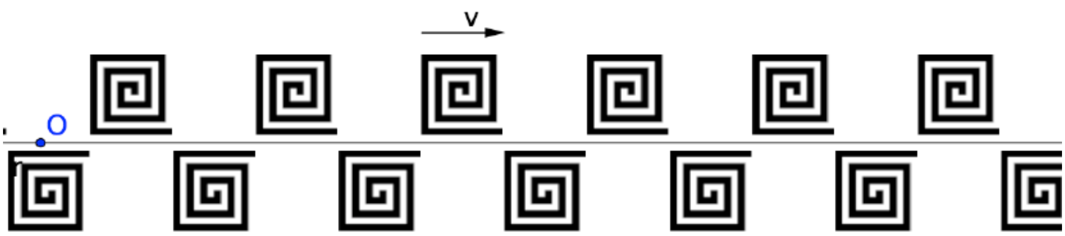
GrecaRr=reflexão[Greca,r]

Sequência[Translação[Greca,i*v], i, -5, 5]

Sequência[Translação[GrecaRr,i*v], i, -5, 5]

https://www.geogebra.org/m/acwnfrxw

D. p1a1 – invariante por translação e reflexão deslizante



r=Recta[O, v]

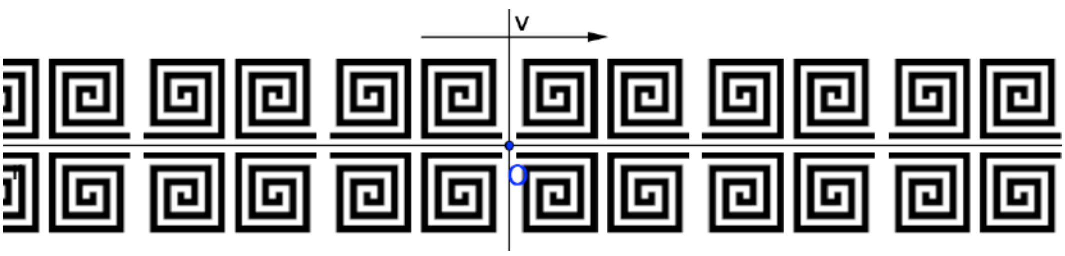
GrecaRrv=Translação[reflexão[Greca,r],v]

Sequência[Translação[Greca,2*i*v], i, -5, 5]

Sequência[Translação[GrecaRrv,2*i*v], i, -5, 5]

https://www.geogebra.org/m/ddbdcpb5

E. pmm2 – Invariante por reflexão paralela e perpendicular a direcção da translação



r=Recta[O, v]

s=Perpendicular[O, v]

GrecaRr=reflexão[Greca,r]

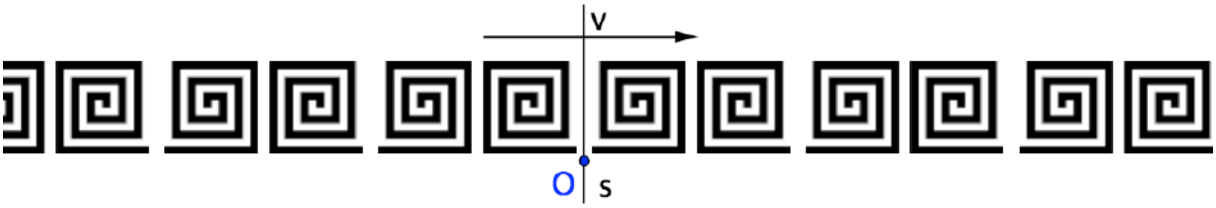
GrecaRv=reflexão[Greca,s]

GrecaRrRv=reflexão[GrecaRv,r]

{Sequência[Translação[Greca,i*v], i, -5, 5],Sequência[Translação[GrecaRr,i*v],i,-5,5],Sequência[Translação[GrecaRv,i*v],i,-5,5],Sequência[Translação[GrecaRrRV,i*v], i, -5, 5]}

https://www.geogebra.org/m/jst7amyv

F. pm11 – Invariante por reflexão perpendicular a direcção da translação



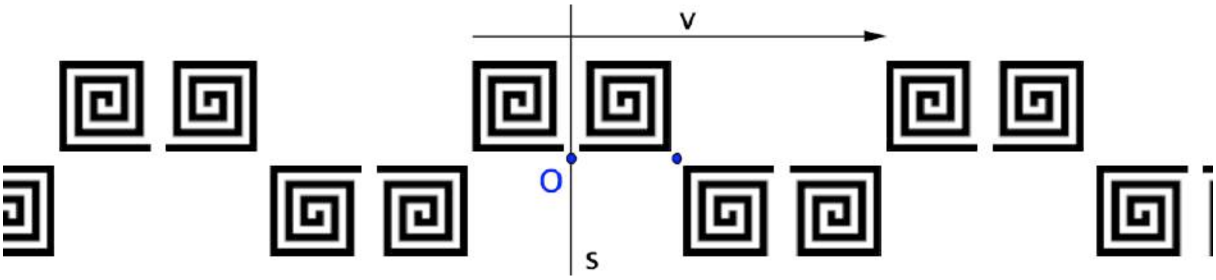
s=Perpendicular[O, v]

GrecaRv=reflexão[Greca,s]

{Sequência[Translação[Greca,i*v], i, -5, 5], Sequência[Translação[GrecaRv,i*v], i, -5, 5]}

https://www.geogebra.org/m/suwxztgj

G. pma1 – Invariante por meia-volta e reflexão perpendicular a direcção da translação



s=Perpendicular[O, v]

GrecaRv=reflexão[Greca,s]

GrecaMv= reflexão[Greca,P]

GrecaMvRv= reflexão[GrecaRv,P]

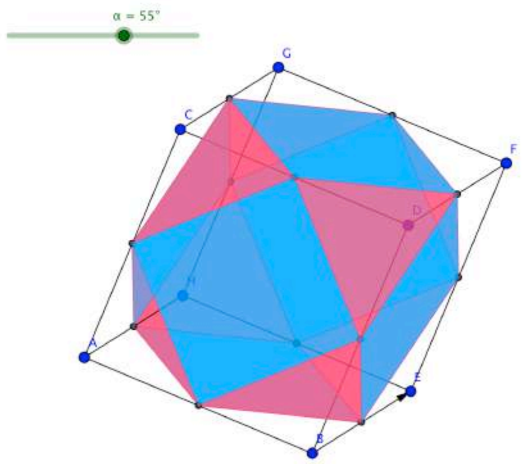
{Sequência[Translação[Greca,i*v], i, -5, 5],Sequência[Translação[GrecaRv,i*v], i, -5, 5],Sequência[Translação[GrecaMv,i*v], i, -5, 5],Sequência[Translação[GrecaMvRv,i*v], i, -5, 5]}

https://www.geogebra.org/m/c4zzycus

Tarefas que usam a *Folha Gráfica 3D*

Tarefa 3.1 — Cubo-octaedro... na *Folha Gráfica 2D*.

Antes do GeoGebra integrar uma janela de visualização 3D as representações de sólidos geométricos já eram possíveis. Retomamos aqui uma das construções que foi usada para representar um cubo, pelo seu caracter didático.



https://www.geogebra.org/m/qsrvvmbs

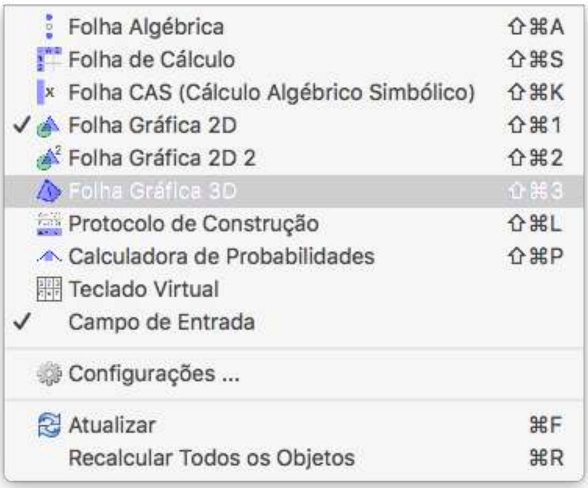
1. Abra o GeoGebra, recorra ao menu Vista de modo a visualizar a Folha Algébrica e a Folha Gráfica 2D.

2. Use a ferramenta seletor, a=2, de modo a representar um ângulo α, que variará entre 0º e 90º.
3. Para o factor de redução introduza na Barra de Entrada $rsin(\alpha)cos(\alpha)$.
4. Marque dois pontos A e B.
5. Para construir os outros dois vértices do quadrado [ABCD] use os comandos: C=Rotação[B, 90°, A] e D=Rotação[A, 90°, C]. O quadrado [ABCD] representará uma das faces do cubo.
6. Para representar as outras faces vamos necessitar de definir dois pontos auxiliar D'=Rotação[D, 270°, B] e D"=Rotação[D', α, B]. O ponto E que nos dará a aresta BE do cubo será afetado do factor r , isto é, E=Homotetia[D'', r, B] ou poderá usar a ferramenta homotetia . Oculte os pontos Auxiliares D' e D" .
7. Construa o vector v, com origem em B e extremidade em E, usando por exemplo a ferramenta vector ou o comando v=Vetor[B, E]. Os três vértices que restam da representação do cubo botem-se da translação dos pontos A, C e D pelo vector v. Pode usar a ferramenta translação, , ou em alternativa, na Barra de Entrada, os comandos F=Translação[D, v], G=Translação[C, v] e H=Translação[A, v].
8. Finalize desenhando os segmentos que representam as arestas do cubo [ABDCHEFG].
9. Construa os pontos médios dos segmentos, com a ferramenta , que representam as arestas docubo, os seis quadriláteros e os oito triângulos que definem a representação do cubo-octaedro.

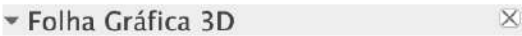
Tarefa 3.2 — Introdução a janela 3D do GeoGebra

Na versão actual do GeoGebra é possível trabalhar a três dimensões.

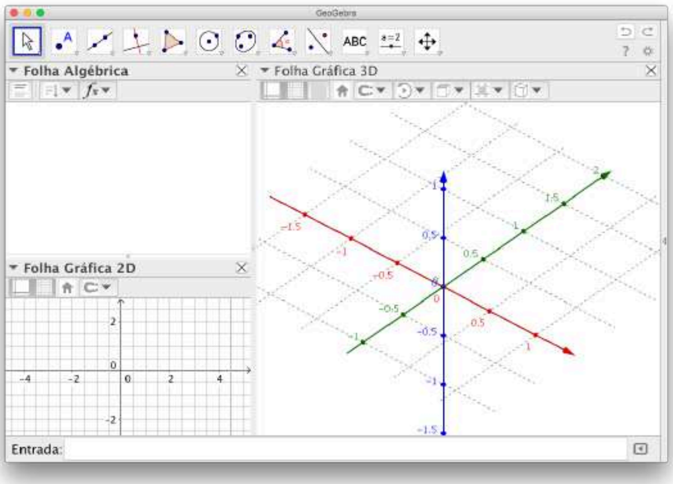
1. No menu Vista, escolha a opção *Folha Gráfica 3D*, .



Aparecerá em seguida uma nova janela que poderemos incluir junto à janela principal escolhendo a opção visualizada na imagem seguinte:



2. Em seguida exiba também a *Folha Algébrica* e poderá organizar a disposição das janelas arrastando-as a partir da sua parte superior



3. Na barra de comandos introduza os comandos O=(0,0,0), A=(1,0,0), B=(1,1,0), C=(0,1,0) e D=(0,0,1). Repare que a folha gráfica 2D é considerada o plano de equação z=0.

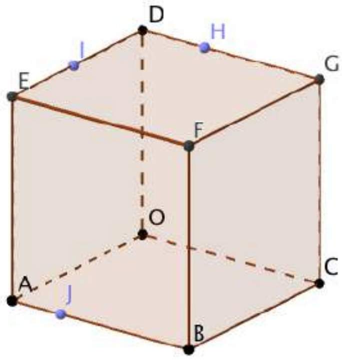
4. Introduza o comando *Prisma[O,A,B,C,D]* para criar um cubo. Poderá usar apenas *Cubo[O,A]*

5. Na parte superior da *Folha Gráfica 3D* altere o estilo da barra, clicando no pequeno triângulo à esquerda do nome da *Folha Gráfica 3D*:

Em seguida será possível controlar a visualização espacial e alterar propriedades de objectos.

6. Oculte o quadriculado e os Eixos Coordenados.

7. Recorra à ferramenta  para criar três pontos H, I, J sobre arestas do cubo como mostra a figura seguinte.



8. Em seguida, a partir da ferramenta  ou do comando *Plano[H,I,J]* construa o plano *HIJ .*

9. Clique sobre o plano e recorrendo à barra que se encontra na parte superior da janela, altere a cor do plano para uma cor escura por forma a tornar a secção no cubo mais visível.

10. Na janela de álgebra selecione todo o poliedro clicando sobre ***a***. Em seguida a altere as cores do poliedro para cores claras próximas do branco.

11. Use a *ferramenta intersecção* para 3d, , ou o comando *InterseçãoGeométrica [<Plano>, <Polígono>]* para determinar a secção provocada no cubo pelo plano HIJ.

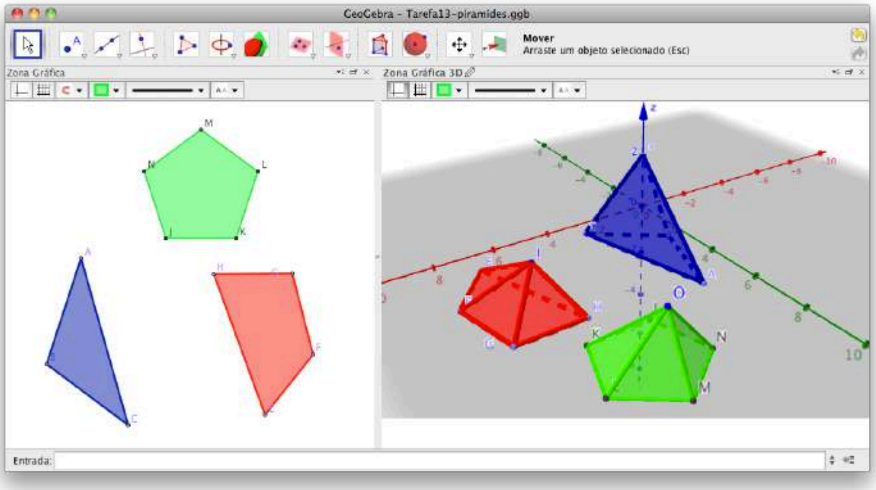
12. Mova os pontos H, I e J e visualize as diferentes secções definidas pelo plano no cubo e clicando com o botão direito do rato poderá alterar as vistas do cubo e das secções produzidas.

13. Clique no botão direito sobre o plano e crie a *vista 2d* do plano, explore a aplicação, nomeadamente o estudo da verdadeira grandeza da secção obtida.

Tarefa 3.3 — Pirâmides

Qual o número mínimo de vértices para obter uma pirâmide?

Para conduzir uma exploração relacionada com a questão pode sugerir-se aos alunos que marquem pontos e usem o comando pirâmide na *Barra de Entrada*.



https://www.geogebra.org/m/vpcptqcv

Na aplicação que deu origem à imagem anterior procedeu-se do seguinte modo no GeoGebra:

1. Activou-se a *Folha Gráfica 2D*, *Folha Gráfica 3D* e *Barra de Entrada*, através do menu *Vista*.

2. Para a pirâmide azul:

   a. Marcaram-se, com a ferramenta •A , três pontos no plano xOy [xOy];
   b. Um ponto no eixo Oz [EixoOz];
   C. Usou-se o comando P_{Az}=Pirâmide[A,B,C,D].

3. No caso da pirâmide vermelha:

   a. Marcaram-se, com a ferramenta •A , quatro pontos no plano xOy [xOy];
   b. Um ponto no espaço escrevendo na *Barra de Entrada* I=(6, 3, 1);
   C. Usou-se o comando P_{Va}=Pirâmide[E,F,G,H,I] .

4. Por último, a pirâmide verde foi realizada de um modo diferente.

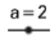
   a. Marcaram-se, com a ferramenta •A , os pontos J e K, na *Folha Gráfica*;

   b. Na *Folha Gráfica*, com a *ferramenta polígono regular*, , ou na barra de entrada com o comando Polígono[J, K, 5], defini-se o polígono da base, um pentágono, escolhendo os pontos J, K e o número de vértices 5;

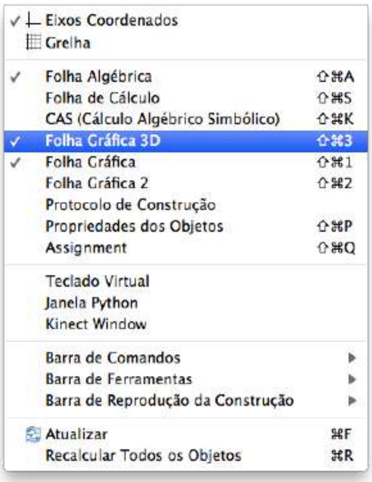
   c. Finalmente, usou-se o comando P_{Vd}=Pirâmide[J, K, L, M, N, O].

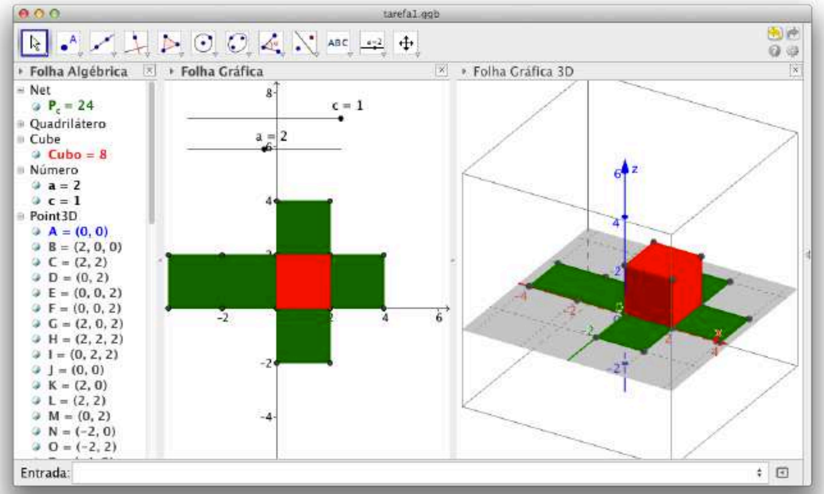
A aplicação permitirá alterar as vistas e os vértices das pirâmides. Para além de obter uma verificação que o número mínimo de pontos para definir uma pirâmide é quatro, onde um não pode ser complanar com os outros três, poderá ser explorado o conceito de pirâmide oblíqua e reta.

Tarefa 3.4 — Cubo de aresta a, sobre um plano e planificação

Pretende-se criar um cubo, podendo variar a medida da aresta com um seletor, .

1. Iniciemos o GeoGebra, gravando o ficheiro com o nome cuboaresta_a.ggb.
2. No menu Exibir, seleccionar *Folha Gráfica 3D*.

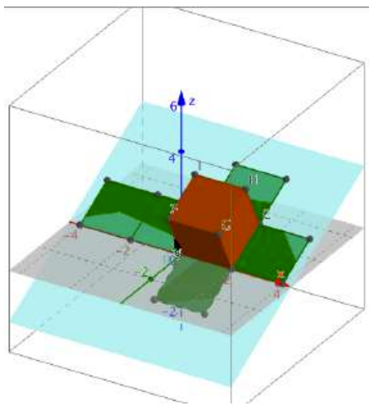


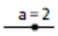


https://www.geogebra.org/m/qf7eqprk

3. Digitar na *Barra de Entrada*, a=3, dar entrada, e exibir o seletor, ou recorrer à ferramenta .
4. Definem-se os vértices do cubo a partir do vértice A adicionando o vetor respectivo.
   A=(0,0,0)
   B=A+(a,0,0)
   C=A+(a,a,0)
   D=A+(0,a,0)
   E=A+(0,0,a)
5. Por último, o cubo é definido como um prisma de Vértices A,B,C e D na base, um quadrado cuja medida do lado é *a*, e de aresta AE que mede *a*. Ca=prisma[A,B,C,D,E].
6. Meça o volume do cubo com a ferramenta, , volume.
7. Uma construção alternativa seria usar apenas:

   A=(0,0,0)
   B=A+(a,0,0)
   E=A+(0,0,a)
   Cubo=Cubo[A, B, Vetor[A, E]]



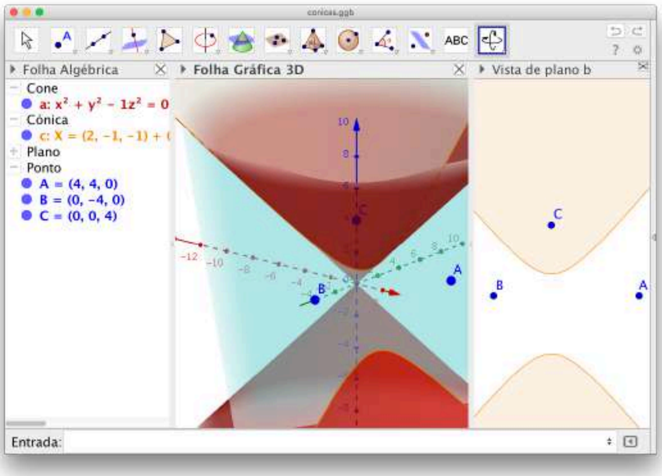
8. Crie um seletor, , c=1/2 que varie entre 0 e 1.
9. Use  ou a barra de entrada e escreva
   P_d=Planificação[Cubo, c]. Movimente o seletor c e observe o efeito.
10. Crie: os seletores α(α=3), e β (β=-1); o plano α *y* + β *z= 0*, acautelando que fica designado por p; e o vector normal ao plano p (u=VetorPerpendicular[p]).
11. Altere a definição do cubo para Cubo=Cubo[A, B, u]
12. Altere os valores dos seletores α e β e observe.

Tarefa 3.5 — Cónicas em 3D

1. Abra o GeoGebra.
2. No menu Vista active a *Folha Gráfica 3D*.
3. Na linha de comandos escreva, e de entrada, de cada um dos seguintes comandos:

a=ConeInfinito[(0, 0, 0), (0, 0, 3), 45°]
A= (4,4,0)
B=(0,-4,0)
C=(0,0,4)
b=Plano[A,B,C]

https://www.geogebra.org/m/bwgsph6w



4. Determine a interseção escrevendo *InterseçãoGeométrica[b,a]* na linha de comandos seguido de enter.

5. Explore diversas posições dos pontos que definem o plano e observe os diferentes tipos de secção.

6. Clique no botão direito sobre o plano e crie a vista 2d do plano, explore a aplicação, nomeadamente o estudo da verdadeira grandeza da secção obtida.

Perguntas para explorar a aplicação com os alunos:

Depois do terceiro passo:

Como se representa o cone e o plano algebricamente?

Depois da aplicação construída:

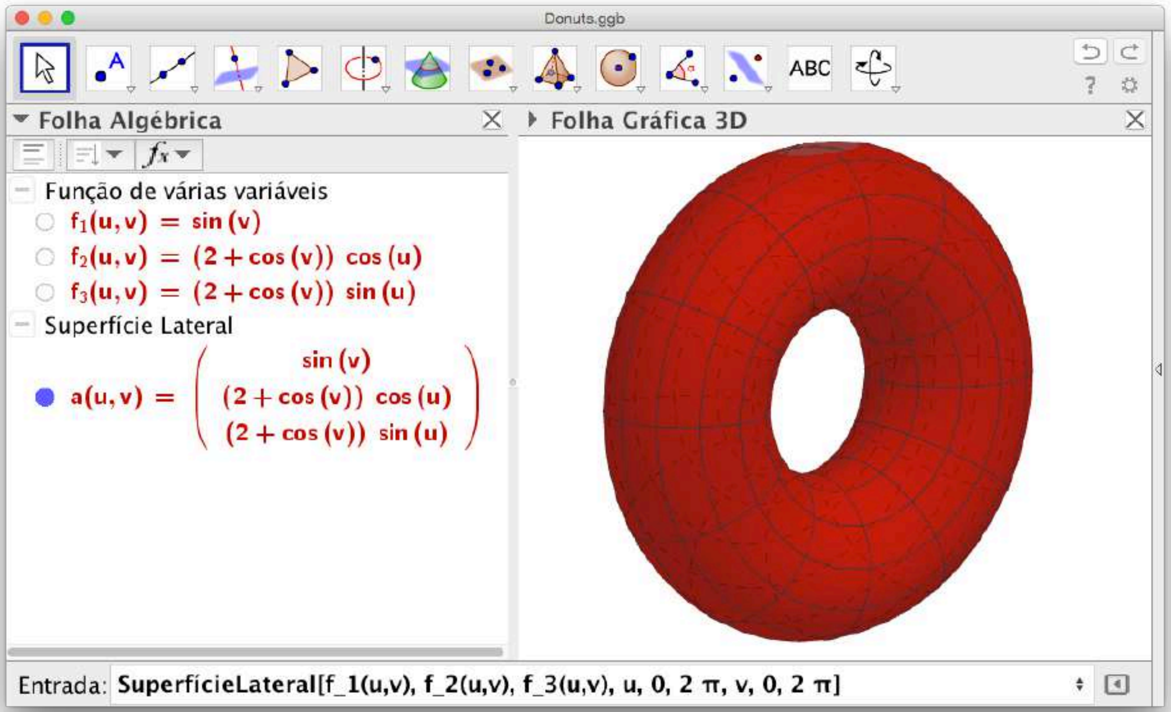
Indica coordenadas de A, B e C para que a intersecção seja:

i. um ponto;
ii. uma circunferência;
iii. uma elipse;
iv. uma parábola.

Observas na intersecção, outro tipo de curvas que conheças? Quais?

Tarefa 3.6 — "Donuts"

Uma superfície corresponde a um subconjunto de pontos, *s*, de $\mathbb{R}^3$, de modo que é possível estabelecer uma função de um aberto de $\mathbb{R}^2$, *I*, em *s*. Em coordenadas paramétricas, uma superfície *s* é descrita pelo lugar geométrico dos pontos da forma $s(u,v)=(f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$ onde as funções f_i, com $i \in \{1,2,3\}$, são funções de um subconjunto *I* de $\mathbb{R}^2$ em IR, contínuas e diferenciáveis.



https://www.geogebra.org/m/najhadxq

1. Para representar as funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ da figura basta usar a *Barra de Entrada*, por exemplo:

   f_1(u,v)=sin(v).
   f_2(u,v)=(2+cos(v)) cos(u)
   f_3(u,v)=(2+cos(v)) sin(u)

2. Use o comando *Superfície Lateral* aplicado às três funções e observe a construção na *Folha Gráfica 3D*. Por exemplo, na *Barra de Entrada* digite:

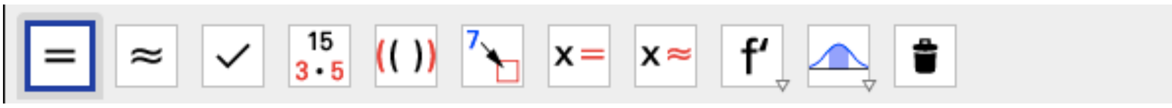
   SuperfícieLateral[f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v), u, 0, 2 π, v, 0, 2 π]

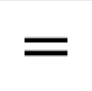
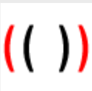
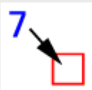
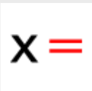
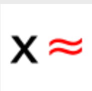
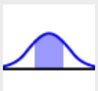
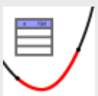
3. Experimente alterar a ordem das funções, no comando *Superfície Lateral,* e verifique o que acontece.

4. Altere os limites das variáveis *u* e *v* no comando *Superfície Lateral* e obtenha representações parciais do toro de modo a que cada uma represente metade, um quarto e um oitavo da superfície lateral do toro.

Tarefas com uso do CAS

A barra de Ferramentas da Vista CAS (**C**álculo **Al**gébrico **S**imbólico)



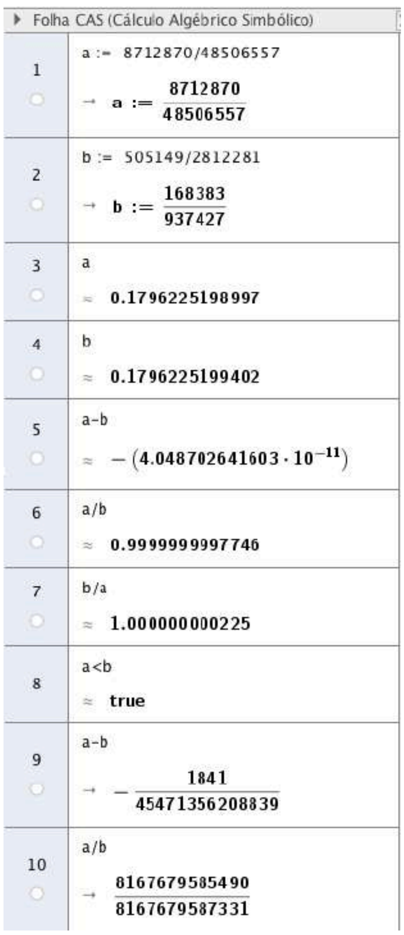
Icone da Ferramenta	Descrição da Ferramenta	Exemplos de comandos associados à Ferramenta e específicos para CAS:
	**Avaliar o valor exato, cálculo simbólico**	
	**Avaliar valor número**	ValorNumérico[<Expressão>] ValorNumérico[<Expressão>, <Algarismos Significativos>]
	**Modo de Validação ou manutenção de uma entrada**	
	**Factorizar uma expressão**	FatoresPrimos[<Número>] FatorizaCl, fatorização, completa, no corpo dos complexos. FatorizaCl[<Expressão>, <Variável>] FatorizaCl[<Polinómio>] FatorizaI[<Expressão>] FatorizaI[<Expressão>, <Variável>] Fatorizar[<Polinómio>] Fatorizar[<Expressão>, <Variável>]
	**Expandir ou desenvolver uma expressão**	Expandir[<Expressão>] ExpansãoTrigonométrica[<Expressão>] ExpansãoTrigonométrica[<Expressão>, <Função Alvo>] ExpansãoTrigonométrica[<Expressão>, <Função Alvo>, <Função Alvo>] ExpansãoTrigonométrica[<Expressão>, <Função Alvo>, <Variável Alvo>, <Variável Alvo>]
	**Substituir**	Substituir[<Expressão>, <Lista de Substituições>] Substituir[<Expressão>, <de>, <até>]
	**Resolver de modo exato**	Resolver, comando em R; Resolver[<Condição em x>] Resolver[<Condição>, <Variável>] Resolver[<Lista de Condições>, <Lista de Variáveis>] CResolver, comando em C CResolver[<Condição>] CResolver[<Condição>, <Variável>] CResolver[<Lista de Condições>, <Lista de Variáveis>]
	**Resolver numericamente**	NSoluções[<Equação>] NSoluções[<Equação>, <Variável>] NSoluções[<Equação>, <Variável = Valor inicial>] NSoluções[<Lista de Equações>, <Lista de Variáveis>]
	**Modo derivada**	Derivada[<Expressão>] Derivada[<Expressão>, <Variável>] Derivada[<Expressão>, <Variável>, <Número>] DerivadaImplícita[<f(x, y)>] DerivadaImplícita[<Expressão>, <Variável Dependente>, <Variável Independente>]
	**Modo Primitiva**	Integral[<Função>] Integral[<Função>, <Variável>] Integral[<Valor>, <Valor Inicial-x>, <Valor Final-x>] Integral[<Função>, <Variável>, <x Inicial>, <x Final>] IntegralEntre[<Função>, <Função>, <Valor Final-x>, <Valor Final-x>] IntegralEntre[<Função>, <Função>, <Variável>, <x Inicial>, <x Final>]
	**Calculadora de Probabilidades**	TDistribuição[<Graus de Liberdade>, <Valor da Variável>] VariânciaAmostra[<Lista de Números>] VariânciaAmostra[<Lista de Números>] Zipf[<Número de Elementos>, <Expoente>, <Valor da Variável>, <Acumulado (truelfalse)>] Weibull[<Forma>, <Escala>, <Valor da Variável>]
	**Inspector de funções**	

Tarefa 4.1 — CAS e atividades numéricas

4.1.1 — Use o CAS no GeoGebra para:

a. calcular o valor aproximado de 8712870/48506557 e 505149/2812281;

b. encontrar o número das primeiras casas decimais coincidentes e consecutivas na expressão decimal dos dois números anteriores.
Qual dos dois números é o maior?



Selecionar, no menu Vista, a *Folha CAS.*	x=
Iniciamos com a ferramenta valor exato ativa.	=
a:= 8712870/48506557	=
b:= 505149/2812281	=
Activamos a ferramenta valor numérico e passar a digitar, em cada um das linhas, o valor a obter.	≈
a; b; a-b; b-a; a/b; b/a.	≈
Podemos usar testes lógicos	
a<b	
Activamos a ferramenta valor exato e passar a digitar, em cada um das linhas, o valor a obter.	=
a-b; a/b;	=
Poderia ter obtido de imediato o valor de a e b com um determinado número de algarismos significativos usando o comando: ValorNumérico[<Expressão>, <Algarismos Significativos>]	=

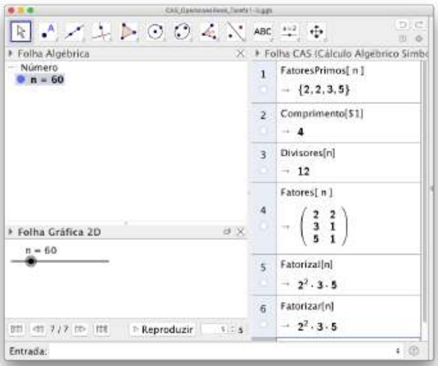
https://www.geogebra.org/m/zhn8xvxk

Desafio: Use o CAS no GeoGebra para responder ao seguinte problema:

Quantos zeros aparecem no final da representação decimal de 1000! ?

4.1.2 — Use o CAS no GeoGebra para responder ao seguinte problema:

Quantos divisores positivos possui n?

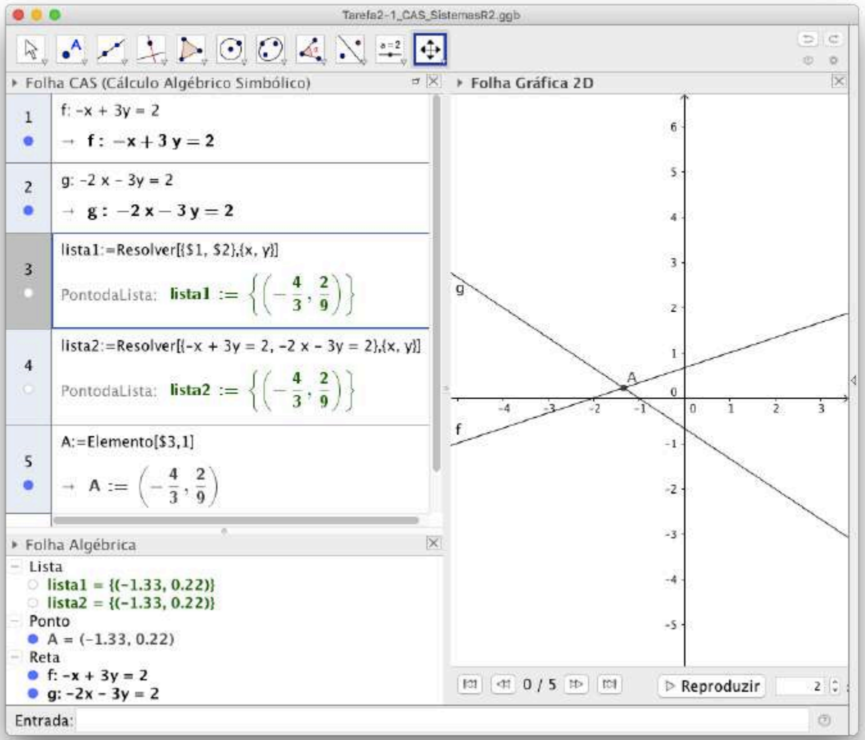


https://www.geogebra.org/m/m99wg4gu

1. Crie um selector, n, que represente números inteiros numa Folha Gráfica.
2. Abra a janela a *Folha CAS* e insira, em cada linha e pela ordem que se indica, os seguintes comandos: a) FatoresPrimos[n] ; b) Comprimento[$1]; c) Divisores[n];
   d) Fatores[n]; e) Fatorizal[n].
3. Altere o valor de n e comente os resultados que obtém na folha CAS. Qual é o papel do sinal $ na segunda linha?

Tarefa 4.2 — Resolução de sistemas de equações lineares

4.2.1 — Em duas variáveis



https://www.geogebra.org/m/vtjdpznd

1. Abra o GeoGebra com *Folha Algébrica*, *Folha Gráfica* e a *Folha CAS*.

2. Em cada linha da *Folha CAS*, pela ordem que se indica, insira os seguintes comandos:
   a) -x+3y=2 ;
   b) -2x-3y=2 ;
   c) Resolver[{$1, $2},{x, y}].
   Observe que para mostrar os objectos, na *Folha Gráfica 2D*, necessita activá-los, na *Folha CAS* todos os objetos terão de ser precedidos pela imagem .

3. Altere as equações da 1ª e 2ª linha de modo a testar outros casos.

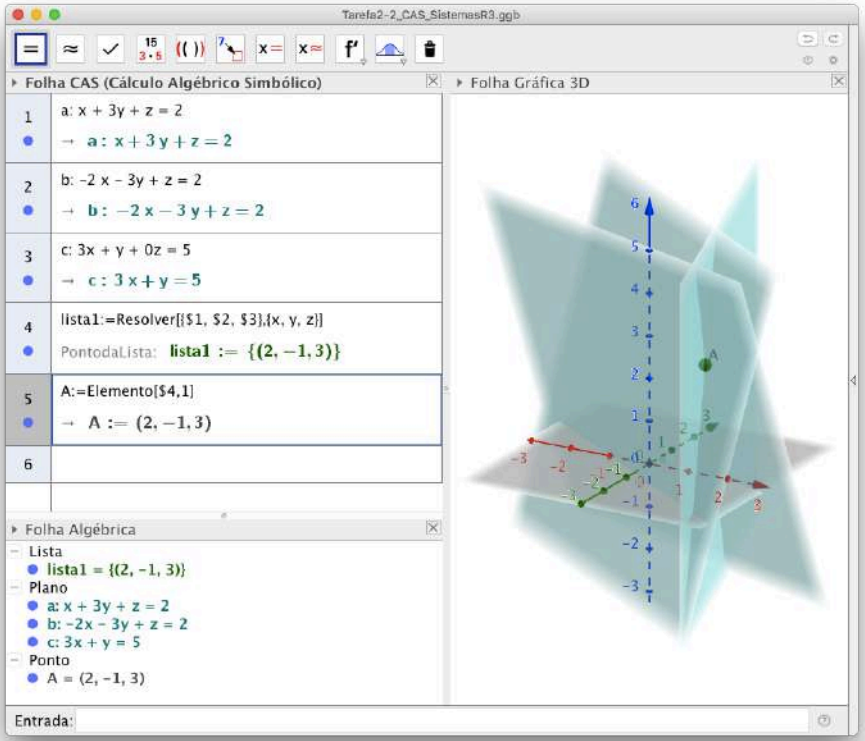
Observações:

- Poderá obter a resolução do sistema usando apenas o comando:

  Resolver[{-x+3y=2,-2x-3y=2},{x,y}].

- A lista obtida tem um ponto, se de facto o quiser obter no GeoGebra terá de usar o comando: Elemento[$3,1], ou substituindo $3 pelo nome da lista ou pelo comando referido na observação anterior. O parâmetro corresponde ao primeiro e único elemento da lista.

4.2.2 — Em três variáveis



https://www.geogebra.org/m/vecatmme

1. Abra o GeoGebra com *Folha de Algébrica*, *Folha Gráfica* e a *Folha CAS*.
2. Em cada linha da *Folha CAS*, pela ordem que se indica, insira os seguintes comandos:
   a) x + 3y + z = 2 ;
   b) -2 x - 3y + z = 2 ;
   c) 3x + y + 0 z= 5 ;
   d) Resolver[{$1, $2,$3},{x, y, z}].

   Observe que para garantir que a equação escrita na alínea c) é interpretada em IR^3 adicionamos o termo “*0 z*”. .
3. Altere as equações da 1ª, 2ª e 3ª linha de modo a testar outros casos.

Observações:

Poderá obter a resolução do sistema usando apenas o comando:

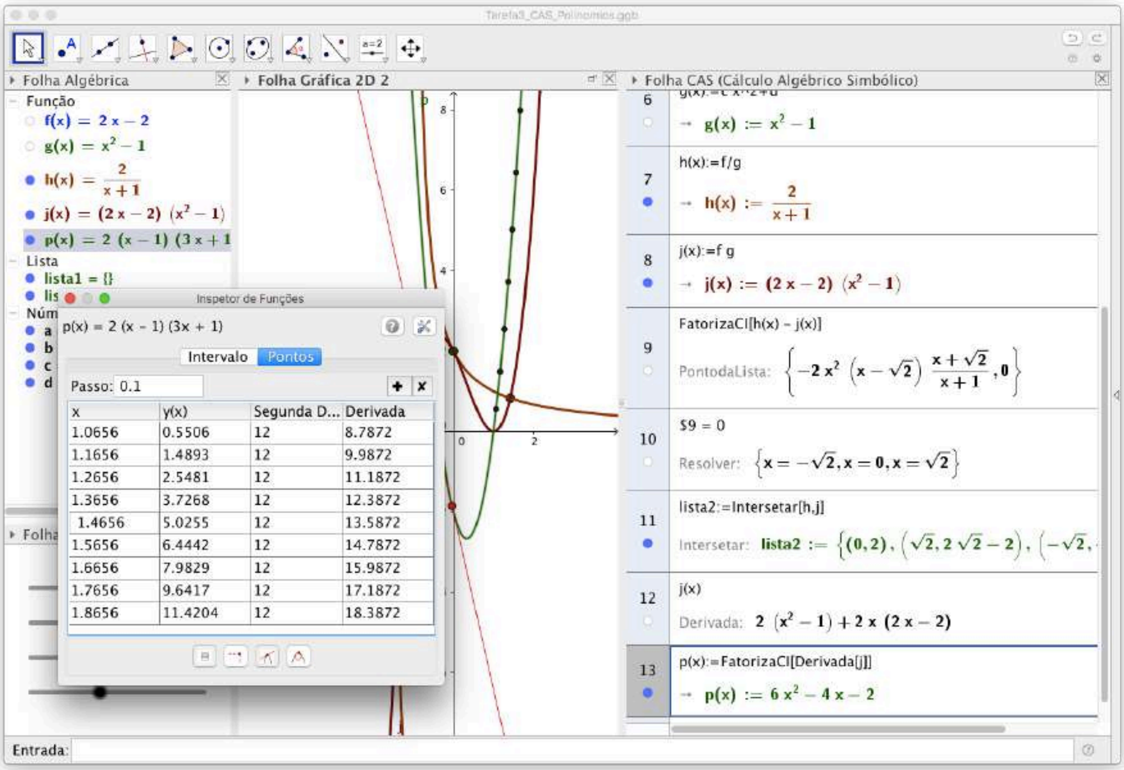
Resolver[{x + 3y + z = 2, -2 x - 3y + z = 2, 3x + y + 0 z= 5},{x, y, z}].

Outras resoluções de sistemas

Poderá obter a resolução de um sistema não linear usando o comando *Resolver*. neste caso poderá necessitar das soluções em C e nesse caso terá de usar o comando *CResolver*.

Tarefa 4.3 — Polinómios

Vamos considerar os polinómios ax+b e cx^2+d. Construamos uma aplicação onde aos parâmetros a, b c e d fazemos corresponder un slide, determinando o produto, o quociente, e a diferença entre o quociente e o produto dos polinómios referidos.



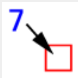
https://www.geogebra.org/m/evdmkgxt

1. Abra o GeoGebra com *Folha de Algébrica*, *Folha Gráfica*, *Folha Gráfica* 2D e a *Folha CAS*. Organize as janelas como é sugerido na imagem acima.
2. Em cada linha da *Folha CAS*, pela ordem que se indica, insira os seguintes comandos:
    a. a := 2
    b. b := -2
    c. c := 1
    d. d := -1
    e. f(x) := 2x - 2
    f. g(x) := x² - 1
    g. h(x) :=f / g
    h. j(x) := f g

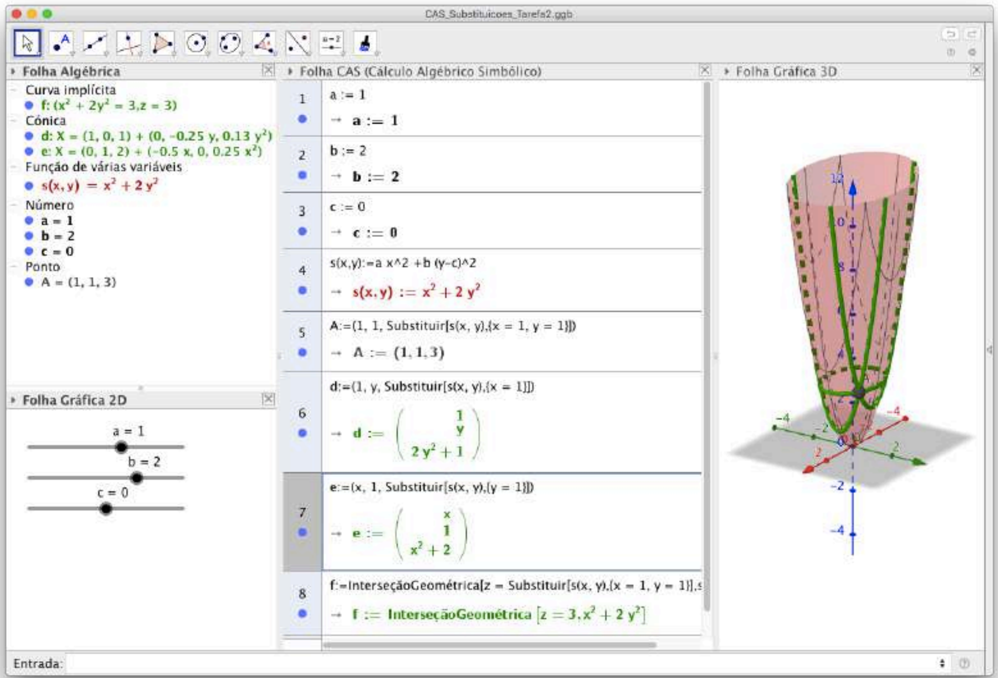
i. FatorizaCl[h(x) - j(x)]
j. Resolver[$9 = 0]
k. Intersetar[h,j]
l. j(x), seguido da *ferramenta derivada*, f‘ ,
m. FatorizaCl[Derivada[j]]
n. Use a *ferramenta inspector de funções*,  ,para estudar a função p.

Tarefa 4.4 — Usar substituições

O comando ou a *ferramenta substituir* pode ser usada na *Folha CAS*.

Ferramenta	Comandos
	Substituir[<Expressão>, <Lista de Substituições>] Substituir[<Expressão>, <de>, <até>]

Experimente usar o método de substituição na Vista CAS para obter uma carta sobre uma superfície. Abra o GeoGebra com *Folha Algébrica*, *Folha Gráfica 3D* e a *Folha CAS*.



https://www.geogebra.org/m/szxdsau8

Para este efeito, em cada linha da *Folha CAS*, pela ordem que se indica, insira o seguintes:

a := 1

b := 2

c := 0

s(x,y):=a x^2 +b (y-c)^2

(1,1,Substituir[s(x, y),{x=1,y=1}])

(1, y, Substituir[s(x, y),{x = 1}])

(x, 1, Substituir[s(x, y),{y = 1}])

InterseçãoGeométrica[z=Substituir[s(x, y),{x=1,y=1}], s(x,y)]

Tarefa 4.5 — Somatórios e Limites

Na *Folha CAS* poderemos calcular o valor de somatórios e de limites. Entre os comados disponíveis enumeramos no caso dos:

somatórios

Soma[<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>]

limites:

Limite[<Expressão>, <Valor>]

Limite[<Expressão>, <Variável>, <Valor>]

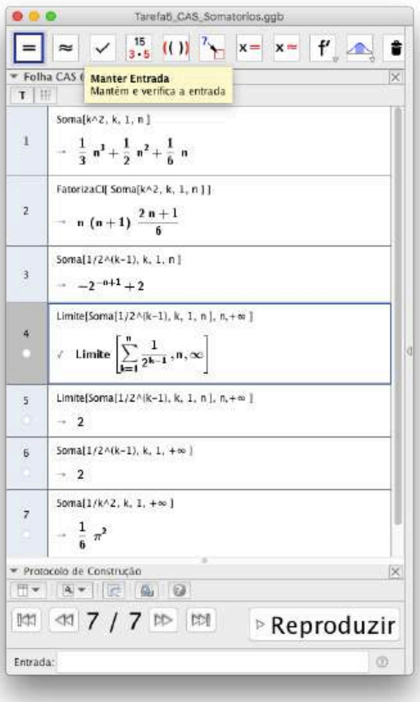
Limite[<Expressão>, <Valor>]

Limite[<Expressão>, <Variável>, <Valor>]

Limite[<Expressão>, <Valor>]

Limite[<Expressão>, <Variável>, <Valor>]

Observe-se ainda que nas somas e nos limites no parâmetro valor são admitidos os valores +∞,-∞, ∞.



N.	Ref. CAS	Comando de Entrada	Valor de Sáida
1	\$1	Soma[k²,k,1,n]	$1 / 3\ n^3 + 1 / 2\ n^2 + 1 / 6\ n$
2	\$2	FatorizaCI[Soma[k²,k, 1,n]]	$n\ (n + 1)\ (2n + 1) / 6$
3	\$3	Soma[1 / 2^(k - 1),k,1,n]	-2^(-n + 1) + 2
4	\$4	Limite[Soma[1 / 2^(k - 1),k,1,n],n,∞]	Limite $\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}, n, \infty\right]$
5	\$5	Limite[Soma[1 / 2^(k - 1),k,1,n],n,∞]	2
6	\$6	Soma[1 / 2^(k - 1),k,1,∞]	2
7	\$7	Soma[1/k^2, k, 1, +∞]	$\frac{1}{6}\ \pi^2$

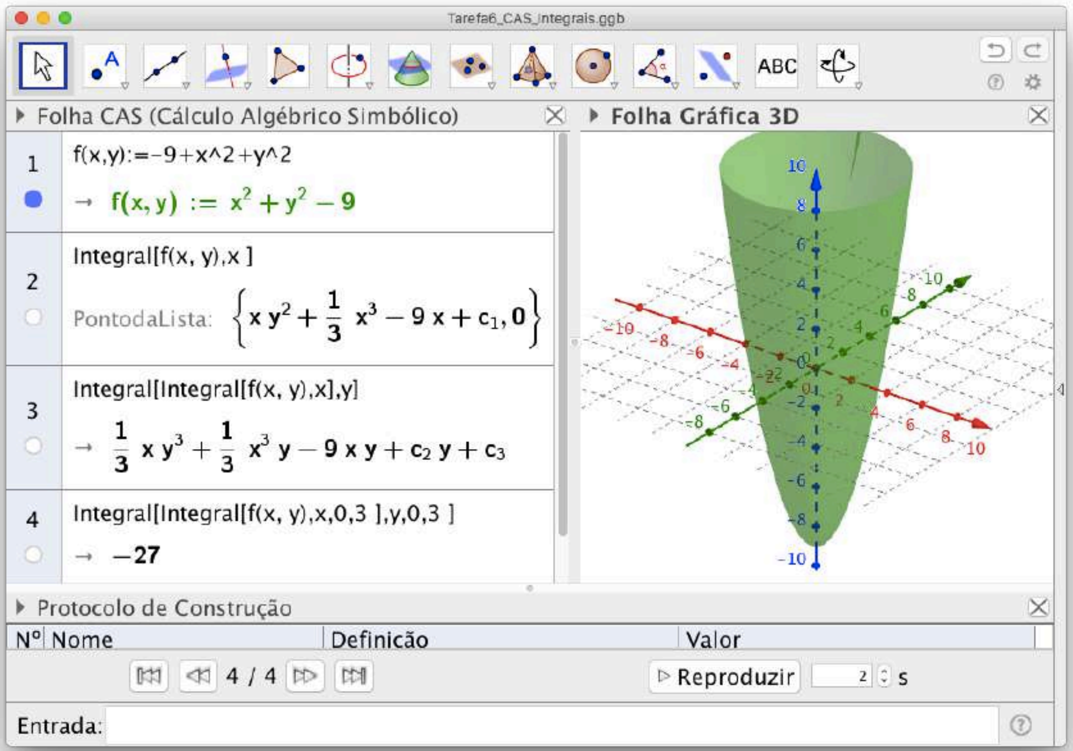
https://www.geogebra.org/m/ke4ahxeq

Tarefa 4.6 — Integrais

Na *Folha CAS* poderemos calcular o valor de integrais, usando comandos ou ferramentas.

Ferramenta	Comandos
∫	Integral[<Função>] **Integral[<Função>, <Variável>]** Integral[<Valor>, <Valor Inicial-x>, <Valor Final-x>] Integral[<Função>, <Variável>, <x Inicial>, <x Final>] IntegralEntre[<Função>, <Função>, <Valor Final-x>, <Valor Final-x>] IntegralEntre[<Função>, <Função>, <Variável>, <x Inicial>, <x Final>]

Abra o GeoGebra com *Folha Gráfica 3D* e a *Folha CAS*.



https://www.geogebra.org/m/qztykhgs

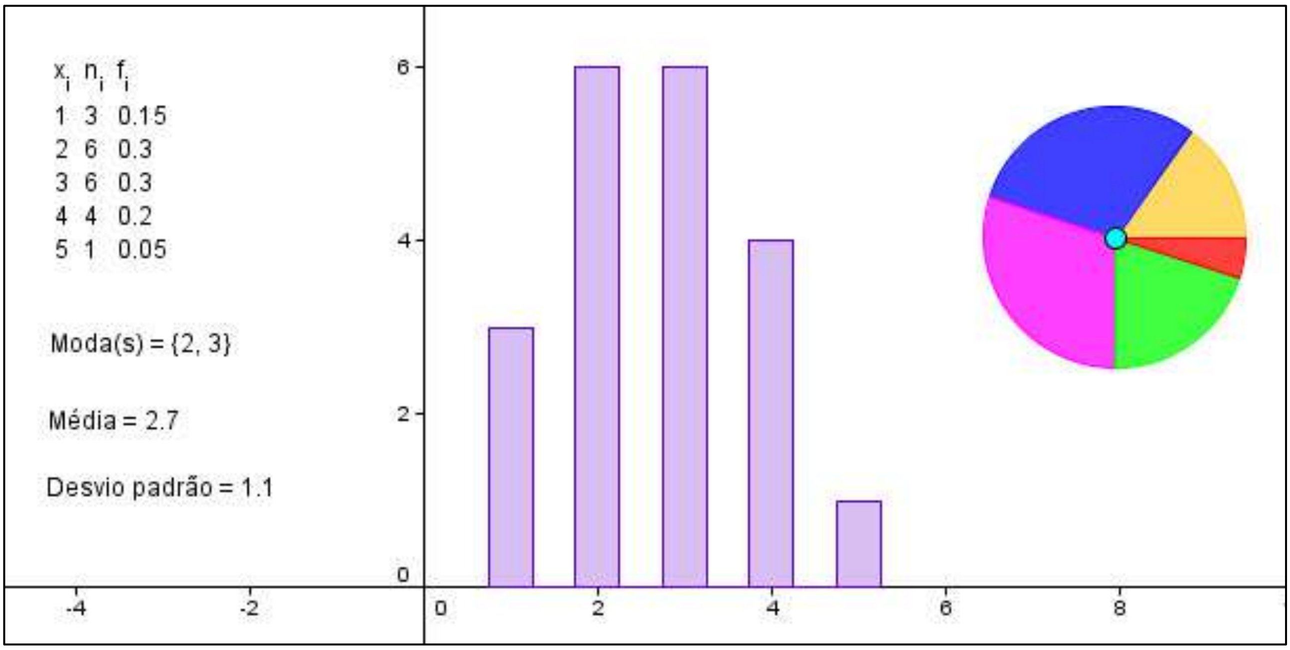
Para este efeito, em cada linha da *Folha CAS*, pela ordem que se indica abaixo, insira os seguintes comandos:

Nº	Nome	Definição ou comando de entrada	Valor de Saída
2	Função de várias variáveis f, na 1ª linha.	f(x, y) := $x^2 + y^2 - 9$	f(x, y) = $x^2 + y^2 - 9$
3	Célula CAS $2	Integral[f(x, y),x]	{$x\ y^2 + 1 / 3\ x^3 - 9x + c1$, 0}
4	Célula CAS $3	Integral[Integral[f(x, y),x],y]	$1 / 3\ x\ y^3 + 1 / 3\ x^3\ y - 9x\ y + c2\ y + c3$
5	Célula CAS $4	Integral[Integral[f(x, y),x,0,3],y,0,3]	-27

Tarefas que envolvem o uso da folha de cálculo

Tarefa 5.1 — Estatística descritiva, folha de cálculo e janela 2D
(Dos Santos, Geraldes, Ribeiro & Trocado, 2009)

Objectivo: construir diagramas, tabelas de frequências e medidas (média, desvio padrão, etc.)



Considere uma turma A, com 20 alunos, e as respectivas classificações, na escala 1 - 5, em duas disciplinas, digamos B e C.

5.1.1 — Introdução dos dados na *Folha de Cálculo*

- No menu Vista, escolha *Folha de Cálculo*
- Insira A1 = 1 e A2 = 2
- Com o botão esquerdo do rato, seleccione A1 e A2; depois, clique no pequenino quadrado azul situado no canto inferior direito da selecção e arraste até A20; ficam assim criados os números dos alunos na turma.
- Para criar uma lista com as notas de 1 a 5, comece por seleccionar A1:A5; depois, faça clique-direito na selecção e escolha *Criar lista*; então, aparece na *Folha Algébrica* a lista L_1 = {1, 2, 3, 4, 5}; renomeie esta lista para notas.
- Agora crie classificações aleatórias para as duas disciplinas, A e B, inserindo sucessivamente na *Barra de Entrada*, os comandos:
    - B1 = AleatórioInteiroEntre[Mínimo[notas], Máximo[notas]]
    - C1 = AleatórioInteiroEntre[Mínimo[notas], Máximo[notas]]

- Com o botão esquerdo do rato, seleccione B1; depois, clique no pequenino quadrado azul situado no canto inferior direito da selecção e arraste até B20; repita este procedimento para C1.

Obs: se quiser inserir os dados à sua escolha, terá de o fazer um a um; para obter nova séries de dados aleatórios basta pressionar a tecla F9.

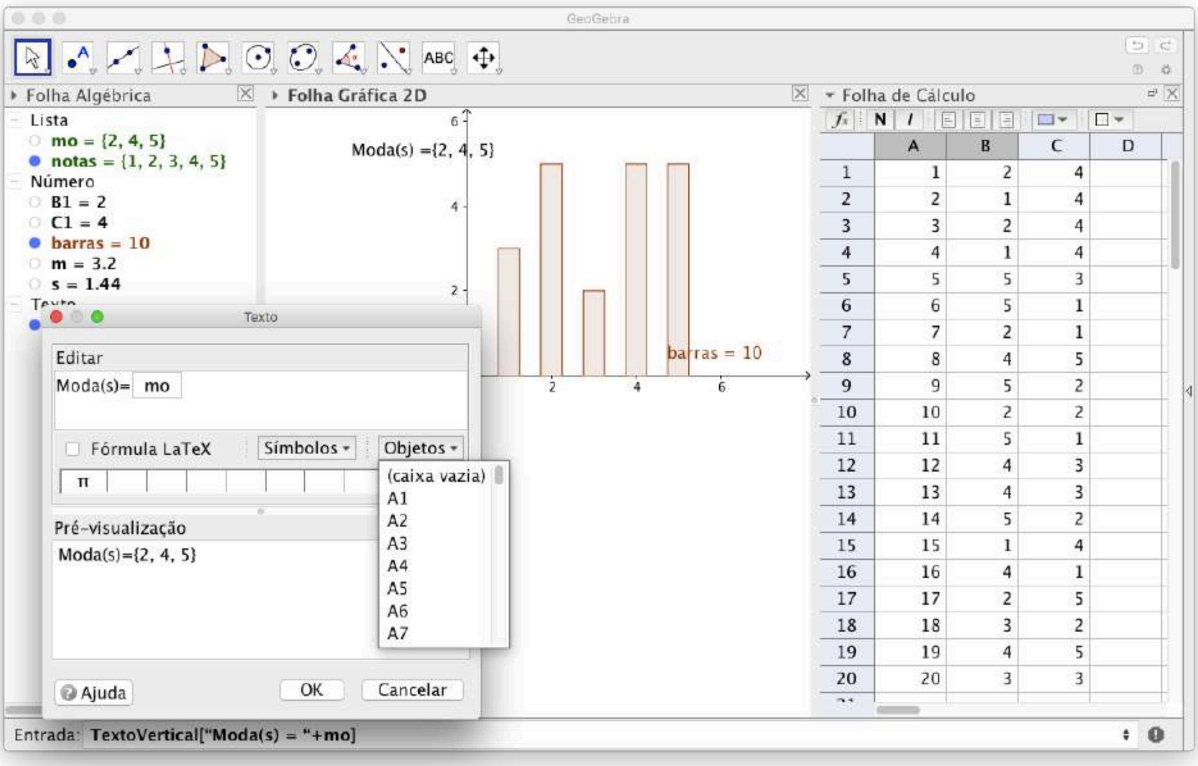
5.1.2 — Construção do diagrama de barras, moda, média, desvio padrão e tabela de frequências

- Na *Barra de Entrada*, insira:
  - mo = Moda[B1:B20]
  - m = Média[B1:B20]
  - s = DesvioPadrão[B1:B20]
  - barras = GráficodeBarras[B1:B20, 0.5],

Obs: B1:B20 é o conjunto de classificações na disciplina B e 0.5 é a largura das barras

- Agora use a ferramenta ABC *Inserir texto* para criar os seguintes textos dinâmicos:
  - “Moda(s) = “ + Caixa vazia onde escreverá mo
  - “Média = “ + Caixa vazia onde escreverá m
  - “Desvio padrão = + Caixa vazia onde escreverá s

Obs: estes textos são nomeados automaticamente texto1, texto2 e texto3



https://www.geogebra.org/m/jen55wmw

- Crie as listas que lhe permitirão construir uma tabela de frequências, inserindo na *Barra de Entrada*, sucessivamente:
    - Sequência[ContarSe[x≟Elemento[notas,k],B1:B20],k,1, Comprimento[notas]]
    - Sequência[Elemento[lista1, k] / 20, k, 1, Comprimento[lista1]]
    - Inserir["x_i", notas, 1]
    - Inserir["n_i", lista1, 1]
    - Inserir["f_i", lista2, 1]

  Obs1: a primeira destas cinco listas é automaticamente nomeada lista1 e contém as frequências absolutas.

  Obs2: na expressão Inserir["x_i", notas, 1], o texto "x_i" é o objecto que aparecerá na posição1 da nova lista2.
- Construa uma tabela de frequências (objecto que será nomeado texto4), inserindo na *Barra de Entrada*:
    - Tabela[{lista3, lista4, lista5}, "vl"]

  Obs: o segundo parâmetro, "vl", indica que a tabela é vertical (v) e as colunas são alinhadas à esquerda (l) [do inglês *left*]
- Crie uma *Caixa booleana*, para exibir/esconder os objectos texto1, …, texto4 e barras:

\- Abra a penúltima caixa de ferramentas (a contar da esquerda) e seleccione a *ferramenta caixa para exibir/esconder objectos,* ; então, abre-se uma janela de diálogo onde pode definir a legenda e seleccionar os objectos que pretende exibir/ esconder com esta caixa; note que a selecção dos objectos pode ser feita na *Folha Algébrica*, na *Folha Gráfica 2D* ou na lista de objectos que pode ver na própria janela de diálogo; clique em *Aplicar* e aparecerá não só a pequena caixa na *Folha Gráfica* mas também o *valor boleano*, **a**, na *Folha Algébrica.*

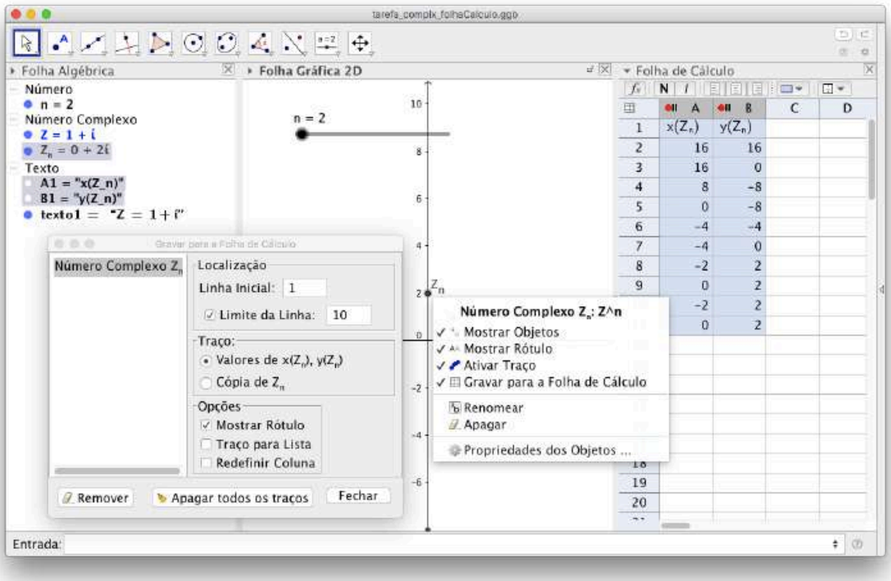
\- Esconda os referidos objectos, desmarcando esta caixa.

Tarefa 5.2 — *Folha de Cálculo* e Números Complexos

Representação gráfica das potências de expoente natural de um número complexo

Objectivo: Exploração de propriedades dos números complexos (potências de expoente natural) com recurso à folha de cálculo.

1. Represente o número complexo *1+i* , associado ao afixo *Z* , Z=1+i .
2. Em seguida, construa o selector n, que varie entre 1 e 30 com incrementos de 1.
3. Através do comando Z_n=Z^n construa o potencia de base Z e expoente n.
4. Com o botão direito do rato sobre Z_n active o traço de Z_n.
5. No menu exibir, escolha a opção *Folha de Cálculo*.
6. Com o botão direito do rato sobre o ponto Z_n escolha a opção *Enviar traço para a folha de cálculo*



https://www.geogebra.org/m/qbewgtyx

7. Se alterar os valores de n poderá observar que a parte real e a parte imaginária de Z_n serão registadas na folha de calculo.
8. Para observar o módulo e o argumento de Z_n deverá aceder às propriedades de Z_n e no separador *Álgebra* escolher a opção *Coordenadas Polares*.
9. Em seguida, construa o selector t, que varie entre -10 e 10 com incrementos de 0.1, ou seja represente números racionais.
10. Através do comando *Z_t=Z^t* representa a potência de Z de expoente real.
11. Recorra à *ferramenta locus,* , e seleccione os pontos Z_t e t para representar o lugar geométrico das potencias de um número complexo de expoente real. Manipule o selector t.

GeoGebra e LaTeX

Vamos iniciar com uma representação do gráfico de uma função real de variável real, definida por ramos. Posteriormente, dar-se-ão algumas indicações de como usar LaTeX para melhorar a edição de texto matemático.

Tarefa 6.1 — Funções por ramos I

Objectivo: *Representação gráfica de uma função definida por ramos.*

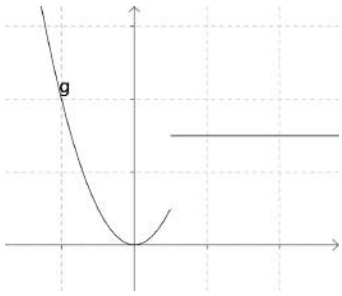
Represente a função definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

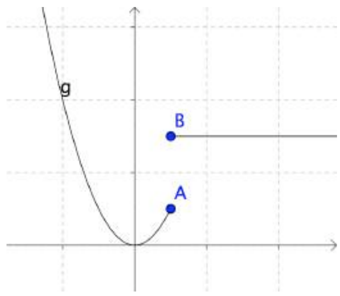
Analogamente ao que é feito nas folhas de cálculo (por exemplo Excel) uma função pode ser representada graficamente pelo teste lógico "*Se*". A expressão deverá ser introduzida na *Barra de Entrada* com a seguinte sintaxe:

g(x)=Se[teste_lógico,valor_se_verdadeiro,valor_se_falso]

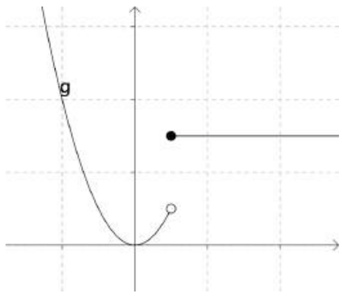
Defina analiticamente a função g através do comando: Se[x < 1, x², 3]



Para representar os pontos do gráfico que determinam uma mudança de ramo, recorra aos comando *A=(1,1)* e *B=(1,3)*.



Em seguida, altere as propriedades dos pontos de modo a obter a figura seguinte.



Tarefa 6.2 — Funções por ramos II

Objectivo: Encadeamento de testes lógicos e uso da linguagem LaTeX.

Represente graficamente a função f, definida por ramos, e recorra ao GeoGebra para verificar a derivabilidade de f em $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & se \quad x > 0 \\ 1 & se \quad x = 0 \\ \frac{1}{x+1} & se \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Represente graficamente a função f a partir da sua expressão analítica:

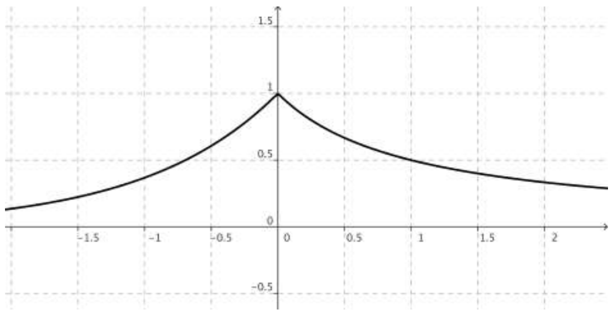
   Para isso recorra à barra de entrada e introduza o comando:

   f(x)=Se[x < 0, e^x, Se[x > 0, 1 / (x + 1), 1]]

A expressão anterior é composta por dois testes lógicos encadeados.

$$f(x) = Se[\underbrace{x < 0}_{\text{teste lógico}}, \underbrace{e\hat{}x}_{\text{valor se verdadeiro}}, \underbrace{Se[x > 0, 1/(x+1), 1]]}_{\text{valor se falso}}$$

Caso não se verifique a condição $x < 0$, será efectuado mais um teste lógico. Neste, para $x > 0$ a função f é definida pela expressão $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ caso contrario, (apenas resta $x = 0$) ficará $f(0) = 1$.



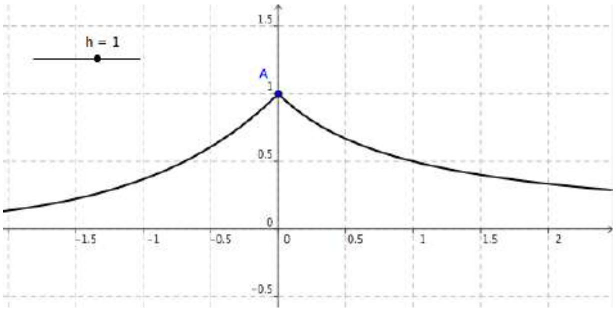
2. Defina e represente o parâmetro h.

Através da ferramenta 

é possível definir o parâmetro h, que varie entre -2 e 2 com incremento de 0.05.

Alternativamente, através do comando *h=1* é possível definir este parâmetro, sendo inicializado com o valor 1.

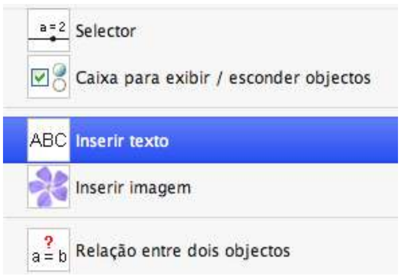
Obtemos então a seguinte representação gráfica:



3. Represente graficamente o ponto de coordenadas B(0+h,f(0+h)).
4. Represente graficamente a recta que passa nos pontos A e B.
5. Clicando com o botão direito do rato sobre a equação da recta, na *Folha Algébrica* escolha a equação reduzida da recta para observar o valor do declive.

   Alternativamente, através do comando “declive[a]” poderá ser obtido o valor do declive da recta.

6. Alterando os valores de h poderemos ficar com a convicção que a f não é derivável em $x = 0$.
7. Se pretendermos juntar à representação gráfica da função f, a sua expressão analítica, teremos de recorrer à inserção de uma caixa de texto.

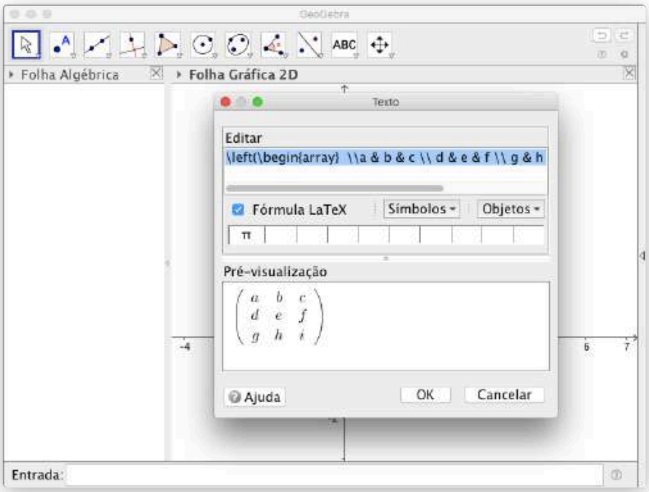


Para que sejam inseridos caracteres matemáticos, teremos de recorrer à linguagem LaTeX. Se escolhermos a introdução de uma matriz 3x3 pré-definida, o código produzido em LaTeX é o seguinte:

\left(\begin{array} \\a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ \end{array}\right)

E será produzida no ecrã a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$



Observando este código poderemos verificar o significado de cada símbolo.

\left(\begin{array} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ \end{array}\right)

- Definição dos parênteses da matriz.
- Definição do início e fim da matriz.
- Mudança de coluna.
- Mudança de linha.

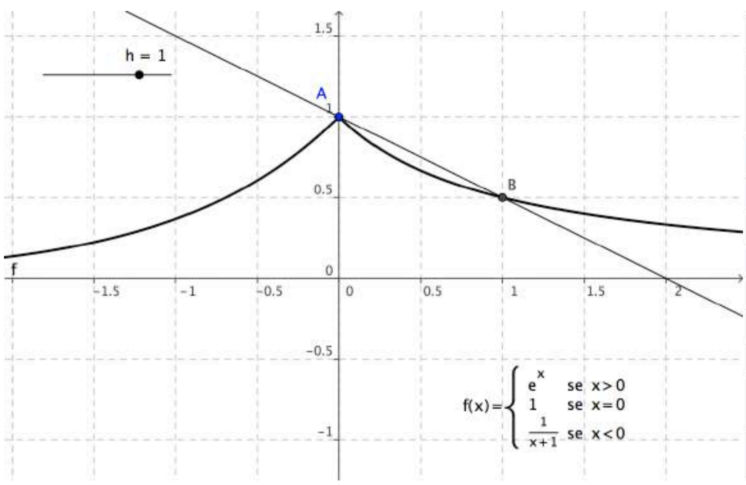
Fazendo algumas alterações ao código anterior poderemos obter o pretendido.

f(x)=\left\{\begin{array} e^x& se & x>0 \\ 1 & se & x=0 \\ \frac{1}{x+1} & se & x<0 \\ \end{array}

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} e^x & se & x > 0 \\ 1 & se & x = 0 \\ \frac{1}{x+1} & se & x < 0 \end{array} \right.$$

- Definição da chaveta.
- Definição da fracção.
- Definição do numerador e do denominador da fracção.

Obtemos então a expressão analítica da função junto da sua representação gráfica.



Alguns comandos de Latex

LaTeX	Resultado
a \cdot b	$a \cdot b$
\frac{a}{b}	$\frac{a}{b}$
\sqrt{x}	$\sqrt{x}$
\sqrt[n]{x}	$\sqrt[n]{x}$
\vec{v}	$\vec{v}$
\overline{AB}	$\overline{AB}$
x^{2}	x^{2}
a_{1}	a_{1}
\sin\alpha + \cos\beta	$\sin\alpha + \cos\beta$
\int_{a}^{b} x dx	$\int_{a}^{b} x dx$
\sum_{i=1}^{n} i^2	$\sum_{i=1}^{n} i^2$

Tarefa 6.3 — Representação da curva normal e calculo de probabilidades com recurso a integrais.

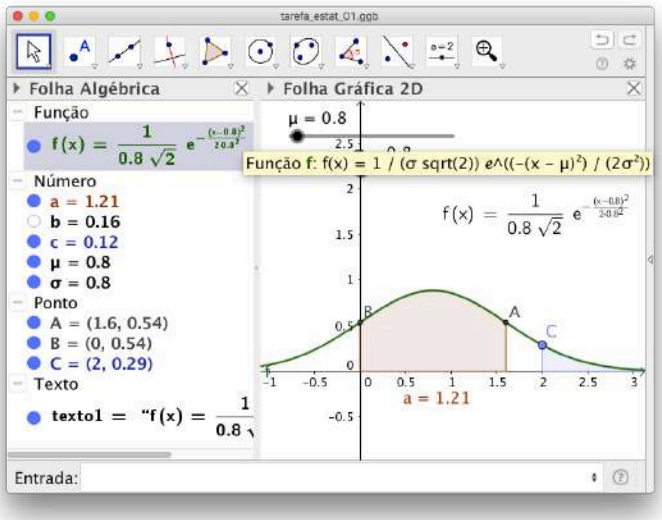
Objectivo: Representação da curva normal e calculo de probabilidades com recurso a integrais.

1. Crie os selectores μ ($\mu\in$[0,20]) e σ ($\sigma\in$[0,2]).
2. Represente a função densidade de probabilidade definida por:

f(x)=(1/(σ sqrt(2))) e^(-(x-μ)^2/(2 σ^2))

3. Represente os pontos: A=($\mu + \sigma$, f($\sigma + \mu$)) e B=(μ - σ, f(μ - σ))
4. Calcule a área da região corresponde a P(μ-σ<X<μ+σ) através do comando:

Integral[f, x(B), x(A)].



https://www.geogebra.org/m/br6sfwez

Esconda a região e os pontos criados anteriormente.

5. Para calcular a área da região à esquerda da região anterior deverá recorrer ao comando com a sintaxe:

Normal[<Média>, <Desvio_Padrão>, <Valor_da_Variável>]

Neste caso o comando será: Normal[μ,σ, x(B)]

6. Construa um ponto C sobre o gráfico de f e calcule a área da região à direita de C.
7. Crie um texto, usando o LaTeX, para escrever a expressão da função densidade de probabilidade.
8. Seleccione a função densidade, na *Folha Algébrica*, arraste para a *Folha Gráfica 2D*. Verifique que um texto com a função é colocado. Movimente os parâmetros e repare que o texto atualiza os valores. Os comandos que pode usar para criar o texto em LaTeX de modo automático são;

LaTeX[<Objeto>] ;

LaTeX[<Objeto>, <Exibir Valor dos Parâmetros (true Ifalse)>] ;

LaTeX[<Objeto>, <Exibir Valor dos Parâmetros (true Ifalse)>, <Exibir Nome do Objeto (true Ifalse)>].

Resultados

O último modulo da formação dedicou-se à criação de tarefas com GeoGebra para a educação matemática. Este módulo propiciou a discussão de várias perspectivas educativas relacionadas com o papel das tarefas para o ensino e aprendizagem da Matemática e as implicações na criação de tarefas que envolvem o GeoGebra.

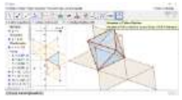
Os participantes foram estimulados a conduzir experiências de ensino onde criaram ou adaptaram tarefas, a implementar em contextos de sala de aula, com o uso do GeoGebra. Neste trabalho foram discutidas as metodologias e enquadramentos teóricos associados. A partir de produções dos estudantes e alunos, que participaram nas experiências de ensino, os professores-formandos analisaram o trabalho que desenvolveram à luz dos pressupostos que orientaram o seu trabalho.

Do trabalho desenvolvido foram apresentados os resultados no seminário final, onde para além de comunicações foram apresentados posters, que se apresentam na secção seguinte. Também foram elaborados artigos e relatos de experiência foram publicados em vários números da Revista do Instituto GeoGebra Internacional de S. Paulo.

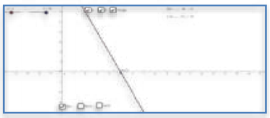
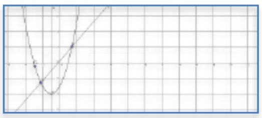
Posters e Fichas de Trabalho

Das tarefas desenvolvidas pelos formandos nas suas escolas foram elaborados posters onde foram identificados os temas e tópicos matemáticos em análise, explicitadas as capacidades transversais e competências que se pretendiam trabalhar, bem como o nível de ensino e ano onde foi realizado o trabalho. Considerando o contexto de Cabo Verde, nos posters são apresentados os objetivos visados com as experiências de ensino e o seu enquadramento curricular e programático. Nestes, foram descritas sumariamente as tarefas desenvolvidas assim como se procedeu a avaliação, e apresentadas as suas conclusões. Do trabalho desenvolvido resultaram, por ordem alfabética, os posters que se apresentam nesta secção, aos quais se anexam as fichas de trabalho fornecidas aos alunos em cada caso.

A utilização do software GeoGebra no estudo de Funções Afim e Quadrática. Jorge Duarte, Paula Sousa Cruz, Sidnei Cruz



A utilização do software GeoGebra no estudo de Funções Afim e Quadrática

Tema: Funções Reais de Variável Real
Tópico: Funções Afim e Quadrática
Capacidades transversais/Competências: Análise gráfica de funções
Nível Ensino/Ano: Ensino Superior – 1º Ano

OBJECTIVOS VISADOS

Despertar o interesse e estimular a aprendizagem da Matemática com auxílio do GeoGebra proporcionando uma metodologia atrativa, dinâmica e interativa. Em particular, estudar as funções afim e quadrática, a partir da interpretação gráfica das mesmas com recurso ao software GeoGebra.

ENQUADRAMENTO CURRICULAR E PROGRAMÁTICO DA TAREFA

Esta actividade enquadra-se no conteúdo da Unidade Curricular Matemática I – Funções Reais de Variável Real, do Ensino Universitário.

DESCRIÇÃO DA TAREFA

A implementação do projeto contou com a participação de um grupo de 10 estudantes voluntários do 1ª ano do Ensino Superior. Com recurso ao GeoGebra exploraram as funções afim e quadráticas. Numa fase inicial para se aferir o nível/conhecimento dos estudantes nesta matéria fez-se um teste diagnóstico sem recurso ao software, bem como proporcionou-se duas sessões de familiarização com o software.

Posteriormente, foi solicitado aos estudantes que partissem de uma função afim ou quadrática incompleta e que fossem introduzindo os parâmetros em falta até chegar à forma canónica. Ao mesmo tempo comparavam as funções conseguidas com a inicial de forma a observar e tirar conclusões quanto às alterações ocorridas.

Por último, para avaliar os resultados e o nível de conhecimento adquirido, bem como os ganhos conseguidos com a exploração do software na aprendizagem destes tópicos matemáticos repetiu-se o teste diagnóstico.


AVALIAÇÃO

A avaliação dos estudantes foi feita ao longo das sessões, podendo verificar no final do projeto melhorias significativas, quando comparado com os resultados obtidos no teste diagnóstico. Citando um dos estudantes, *«o uso do GeoGebra permitiu esclarecer dúvidas antigas que nos impediam de perceber melhor o conteúdo anteriormente trabalhado no ensino secundário»*.

Igualmente, verificou-se interesse e motivação por parte dos estudantes ao longo das sessões, o que contribuiu para o alcance dos objetivos preconizados.






CONCLUSÕES

O desenvolvimento do projeto permitiu concluir que, junto do grupo alvo do estudo, a utilização do GeoGebra no ensino da Matemática contribuiu para melhorar a compreensão dos estudantes no que respeita ao estudo das funções reais de variável real, dado que se trata de um ambiente interativo, que permite ao estudante participar na construção da sua aprendizagem. Contudo, sabe-se que a tecnologia por si só não é suficiente, pelo que deverá ser um trabalho mútuo entre professores e alunos. Desta forma, os resultados alcançados realçam a importância de uma planificação mais cuidada do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, com a introdução do GeoGebra como recurso pedagógico, visando contribuir para mitigação das dificuldades dos estudantes.

Jorge Duarte - jhad.poul@gmail.com
Paula Sousa Cruz - paula.cruz@docente.unicv.edu.cv
Sidnei Cruz - sidnei.cruz@docente.unicv.edu.cv

27 E 28 DE JULHO DE 2017
1º DIA GEOGEBRA NA UNICV
SEMINÁRIO PARA A INSTALAÇÃO DO INSTITUTO GEOGEBRA NA UNICV

www.unicv.edu.cv

Ficha de Trabalho — Inserção e análise de algumas funções do GeoGebra

Tarefa 1 — Funções Afins

1. Prepare o GeoGebra de modo a mostrar a *Folha Algébrica*, , *Folha Gráfica 2D*, , e a *Barra de Entrada*, para isso recorra ao menu *Vista*.

2. Usando a *Barra de Entrada*, insere as seguintes funções: $f(x) = x$; $g(x) = x + 2$; $h(x) = x - 3$; $t(x) = 2$.
   2.1. O que é possível observar no representação cartesiana das funções?
   2.2. O que é que os coeficientes nos dizem quanto a representação do gráfico de cada função?

3. Considere as seguintes funções: $f(x) = -x$; $g(x) = -x + 2$; $h(x) = -x - 3$.
   3.1. Quais as mudanças que foram possíveis observar nos valores dos coeficientes e o que isso interfere na representação gráfica das funções?

4. Considere as seguintes funções: $f(x) = x$; $g(x) = 2x$; $h(x) = 2x + 2$; $t(x) = -2x - 3$.
   4.1. Quais as mudanças que foram possíveis observar na representação gráfica com a alteração do valor do declive, isto é, do coeficiente em x ?

5. Considere a função afim genérica: $f(x) = ax + b$.
   5.1. Usando a *ferramenta seletor,* a = 2, construa os parâmetros a e b, números inteiros, variando entre -5 e 5.
   5.2. Usando a *Barra de Entrada* insira a função f.
      5.2.1. Com a variação dos parâmetros a e b o que conclui quanto ao comportamento do gráfico cartesiano da função f.

Tarefa 2 — Funções Quadráticas

1. Prepare o GeoGebra de modo a mostrar a *Folha Algébrica*, , *Folha Gráfica 2D*, , a *Folha CAS* , , e a *Barra de Entrada*, para isso recorra ao menu *Vista*.

2. Usando a *Barra de Entrada* insere as seguintes funções no GeoGebra: $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 + 3$; $h(x) = 9x^2$.

   2.1. O que é possível observar no comportamento do gráfico cartesiano relacionado com as funções?

3. Considere as seguintes funções: $f(x) = -x^2$; $g(x) = -x^2 + 3$; $h(x) = -9x^2$.

   3.1. Quais as mudanças que foram possíveis observar nos valores dos coeficientes e o que isso interfere na representação gráfica das funções?

4. Transcreva, na *Barra de Entrada*, a função: $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

   4.1. Por observação da função indique os seus:

      4.1.1. zeros;

      4.1.2. vértices;

      4.1.3. extremos.

   4.2. Recorra às *ferramentas interseção de dois objetos*, , ou o *inspetor de funções*, , para confirmar as tuas observações.

   4.3. Recorra a Folha CAS , , e dê entrada dos comandos: *Soluções(f(x)=0)* ; *Soluções(f(x)+3=0)* em duas linhas diferentes.

      4.3.1. Como interpreta os resultados obtidos considerando as observações realizadas anteriormente?

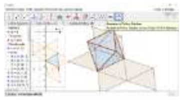
5. Considere a família de funções quadráticas definida por: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

   5.1. Usando a *ferramenta seletor*, a = 2, construa os parâmetros a, b e c.

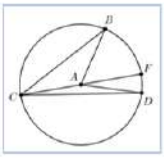
   5.2. Usando a *Barra de Entrada* insira a função f.

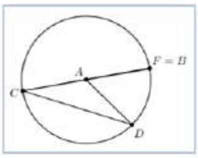
   5.3. Quais as mudanças que foram possíveis observar na representação gráfica de f e qual é a relação com a alteração dos parâmetros a, b e c ?

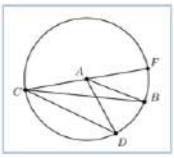
Ângulo Inscrito e Central. Natalia Victorovna Kôrmysheva Dias Furtado e Isabel Sónia Martins Andrade



ÂNGULOS INSCRITO E CENTRAL







Tema: Demonstração da propriedade dos ângulos inscrito e central com auxílio do GeoGebra
Tópico: Geometria da circunferência
Capacidades transversais/Competências: visualização, compreensão, cooperação e troca de experiencias entre os alunos
Nível Ensino/Ano: Secundário/ 9º ano

OBJETIVOS VISADOS

Proporcionar aos alunos um primeiro contacto com o GeoGebra; disseminar o uso de novas tecnologias de informação e de comunicação (TIC's) no ensino/aprendizagem da Geometria; trabalhar com os alunos ângulos inscritos e ângulos centrais que subtendem o mesmo arco da circunferência, de modo que eles sejam capazes de demonstrar a relação existente entre os mesmos, por meio do GeoGebra; promover o desenvolvimento da sua abstração geométrica e do seu raciocínio dedutivo.

ENQUADRAMENTO CURRICULAR E PROGRAMÁTICO DA TAREFA

Este conteúdo é lecionado no terceiro trimestre do 9 ano; o programa vigente propõe que o ensino/aprendizagem deve desenvolver-se em torno de quatro eixos fundamentais: 1) trabalho com os números, 2) pensamento algébrico, 3) pensamento geométrico e 4) trabalho com dados. Ainda, o programa sugere que no processo ensino/aprendizagem sejam levados em conta alguns objetivos gerais: 1) desenvolver o raciocínio geométrico e respetiva visualização; 2) compreender e ser capaz de identificar as propriedades específicas das figuras; 3) compreender a noção de demonstração e ser capaz de empreender raciocínio dedutivo; 4) ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contexto geométrico.

DESCRIÇÃO DA TAREFA

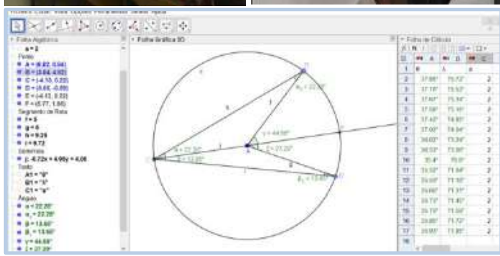
Levando em consideração o facto de que os alunos do 9º ano de escolaridade não tinham tido nenhum contacto prévio com o GeoGebra, as primeiras atividades foram de carater propedêutico: e.g., traçar retas paralelas e retas perpendiculares; construir polígonos e circunferências; medir os ângulos inscrito e central de uma circunferência.

Por fim, foi implementada a parte principal dessa investigação – demonstração da relação entre ângulos inscrito e central de uma circunferência, isto é, demonstrar a preposição, segundo a qual: *numa circunferência, a medida do ângulo central é igual ao dobro da medida do ângulo inscrito que subtende o mesmo arco*, como é o caso, por exemplo, do ângulo central, situado no interior do ângulo inscrito (caso N1).

A tarefa consistiu: i) na construção de uma circunferência, ii) em desenhar os ângulos inscrito e central, iii) em dividi-los por uma semirreta, iv) em medir os ângulos dos triângulos obtidos e gravá-los na Folha de Cálculo, v) em comparar as medidas efetuadas e tirar as conclusões solicitadas e, por último vi) concluir a demonstração da propriedade estudada.

A notável propriedade pressupõe, ainda, dois casos de posicionamento dos vértices dos ângulos inscrito e central que subtendem o mesmo arco: caso N2 - vértice do ângulo central está num dos lados do ângulo inscrito e caso N3 - esse vértice está fora do ângulo inscrito.



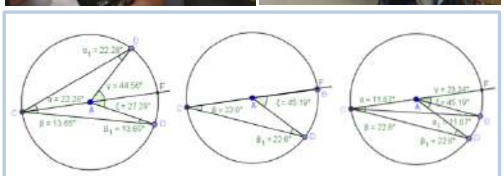


AVALIAÇÃO

Os alunos foram avaliados de acordo com o seu nível de participação na sala de aula e conforme o seu desempenho na resolução das fichas de trabalho.

Durante a execução das atividades propostas no estudo, à medida que iam sendo registradas as perguntas feitas pelos alunos, iam sendo, simultaneamente, analisados os documentos produzidos pelos mesmos, de modo a que se cumprissem as tarefas propostas.

Aplicou-se, também, um meni-teste com as propriedades do angulo inscrito e central, com o propósito de permitir a consolidação da matéria estudada.



CONCLUSÕES

De acordo com as atividades realizadas, conclui-se que os alunos mostraram uma maior clareza de raciocínio, destreza na realização das atividades e uma boa compreensão da matéria. Em relação à utilização do GeoGebra, pôde-se verificar o quanto esta ferramenta tem favorecido e simplificado o processo ensino/aprendizagem dos conceitos estudados na presente pesquisa, ao despertar, justamente, mais curiosidade e dinâmica na realização das atividades propostas, tornando-as mais atrativas. A partir desta experiência, verificou-se nas aulas um significativo avanço no estudo, por parte dos alunos, o que se tem verificado em cada uma das fichas de trabalho aplicadas.

Natália V. Kôrmysheva Dias Furtado
natalia.furtado@docente.unicv.edu.cv
Isabel Sónia Martins Andrade
zamyandrade07@gmail.com

27 E 28 DE JULHO DE 2017
1º DIA GEOGEBRA NA UNICV
SEMINÁRIO PARA A INSTALAÇÃO DO INSTITUTO GEOGEBRA NA UNICV

Ficha de Trabalho - Geometria da circunferência.

1. Construa uma circunferência de centro A e raio a escolha, usando a *ferramenta circunferência dado o seu centro e raio* .

2. Com a *ferramenta novo ponto* , ou ponto sobre o objeto , marque três pontos B, D e C sobre a circunferência (no sentido horário).

3. Usando a *ferramenta segmento*, , desenhe os segmentos contidos nos lados do ângulo ao centro, $< BAD$, e do ângulo inscrito, $< BCD$, usando a ferramenta.

4. Trace uma semirreta, com a ferramenta , passando pelo vértice C do ângulo inscrito e pelo vértice A do ângulo central ou centro da circunferência (dividindo assim o ângulo central e inscrito em dois ângulos).

5. No triângulo BCA, $[BCA]$, usando a ferramenta , determine a amplitude dos ângulos internos com vértices em B e C.
    - 5.1. Depois de realizar as etapas anteriores da tarefa, justificando, apresente as suas conclusões sobre:
        - 5.1.1. a classificação de $[BCA]$ quanto aos lados;
        - 5.1.2. as amplitudes dos ângulos $< ABC$ e $< BCA$;
        - 5.1.3. a soma das amplitudes dos ângulos $< ABC$ e $< BCA$.

6. Encontre, usando a ferramenta ou , o ponto F de interseção da semirreta CA com a circunferência.

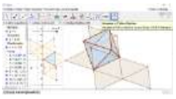
7. Usando a ferramenta , determine a amplitude de $< BAF$.
    - 7.1. Após a realização da etapa 7, qual é a conclusão que pode obter acerca da medida do ângulo externo $< BAF$ e a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes $< ABC$ e $< BCA$ de $[BCA]$?

8. Em $[DCA]$, medir, usando a ferramenta , os ângulos $< CDA$ e $< ACD$.
   8.1. Depois da realização da etapa 8, justificando, apresente as suas conclusões sobre:
      8.1.1. a classificação de $[DCA]$ quanto aos lados;
      8.1.2. as amplitudes dos ângulos $< CDA$ e $< ACD$;
      8.1.3. a soma das amplitudes dos ângulos $< CDA$ e $< ACD$.

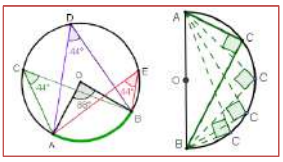
9. Meça $< FAD$ usando a ferramenta .
   9.1. Após a realização da etapa 9, qual é a sua conclusão sobre a medida do ângulo $< FAD$ e a soma da amplitude dos ângulos $< CDA$ e $< ABD$.

10. Usando o botão direito do rato, renomeie os ângulos da base do triângulo ABC por α, $\alpha 1$ e do triângulo ACD por β e $\beta 1$.
   10.1. Após a realização da etapa 10, qual é a conclusão tirada sobre os ângulos $< BAF$ e $< FAD$, em relação a α e β?
   10.2. Se considerarmos as somas dos ângulos $< BAF$ e $< FAD$, α e β, e os ângulos central $< BAD$ e inscrito $< BCD$, qual é a conclusão que pode tirar?

Ângulos inscritos com recurso ao GeoGebra. João Dantas Gomes Vaz



Ângulos inscritos com recurso ao GeoGebra

Tema: Geometria da Circunferência
Tópico: Circunferência - Ângulos inscritos
Capacidades transversais/Competências: Formulação de conjeturas, interpretação, generalização, comunicação e discussão de relações e propriedades
Nível Ensino/Ano: 9º Ano de Escolaridade

Objetivos visados

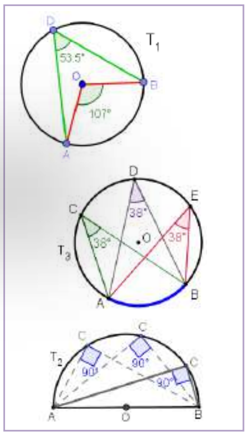
O trabalho apresenta uma proposta didática para a disciplina de Matemática, com a aplicação do software GeoGebra como ferramenta de auxílio no ensino de Circunferências. Procurou-se construir, implementar e avaliar três tarefas, do tópico Circunferência, com recurso ao GeoGebra. Portanto, elenca os seguintes objetivos específicos:

- Familiarizar os alunos com as ferramentas básicas do GeoGebra;
- Explorar os diferentes recursos e ferramentas do software GeoGebra, visando a construção de objetos geométricos;
- Construir uma sequência de três tarefas do tópico Circunferência, com recurso ao GeoGebra;
- Estabelecer conjeturas entre os objetos construídos através de manipulação;
- Identificar propriedades dos ângulos inscritos numa Circunferência;
- Desenvolver a capacidade de comunicação.

Enquadramento curricular e programático das tarefas

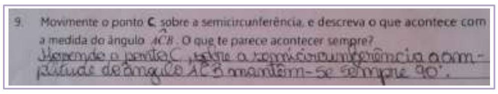
As tarefas enquadram-se no tema Geometria da Circunferência, do programa de Matemática do 9º ano de escolaridade. Com o desenvolvimento das tarefas pretende-se que os alunos, no ambiente do GeoGebra, conjeturem sobre a relação entre a amplitude de um ângulo inscrito com a amplitude do respetivo ângulo ao centro correspondente; que os alunos conjeturem e comuniquem que qualquer ângulo inscrito numa semicircunferência é reto e que estabelecem a relação existente entre as amplitudes de ângulos inscritos num mesmo arco de Circunferência.



Descrição das tarefas

Em virtude do número de computadores, os alunos realizaram as tarefas em grupos. Foram realizados três encontros com a duração de 200 minutos. No primeiro encontro foi apresentado o software e algumas atividades de familiarização com as suas ferramentas básicas. No segundo e no terceiro encontro os alunos desenvolveram três tarefas de construção, análise, exploração das relações e propriedades de ângulos inscritos numa Circunferência. Durante a experiência a interação professor-turma foi desencadeada, no sentido de esclarecer os alunos relativamente a raciocínios incompletos, formulando questões orientadoras que os levassem a completar esses raciocínios e também no esclarecimento de dúvidas relativamente a conceitos apreendidos anteriormente e à interpretação dos enunciados.
De sublinhar que depois da recolha dos trabalhos realizados, criou-se um espaço para a discussão de processos e resultados, em grupo-turma.


9. Movimente o ponto C sobre a semicircunferência, e descreva o que acontece com a medida do ângulo ACB. O que te parece acontecer sempre?
Movendo o ponto C sobre a semicircunferência a amplitude do ângulo ACB mantém-se sempre 90°.

Avaliação

Os alunos foram avaliados, principalmente pelas suas produções escritas. No entanto, durante a realização das tarefas foram apreciados:

- O envolvimento dos alunos na realização das tarefas;
- A pertinência das intervenções dos elementos do grupo;
- O levantamento de conjeturas, comunicação das relações e propriedades;
- O grau de intervenção nas partilhas e discussões das ideias, em grupo-turma.

De realçar uma intervenção do aluno durante a realização das tarefas que mostra um forte desejo de aprendizagem da Matemática suportada pelo computador: "Fessor, desta vez o teste vai ser no computador?"




Conclusões

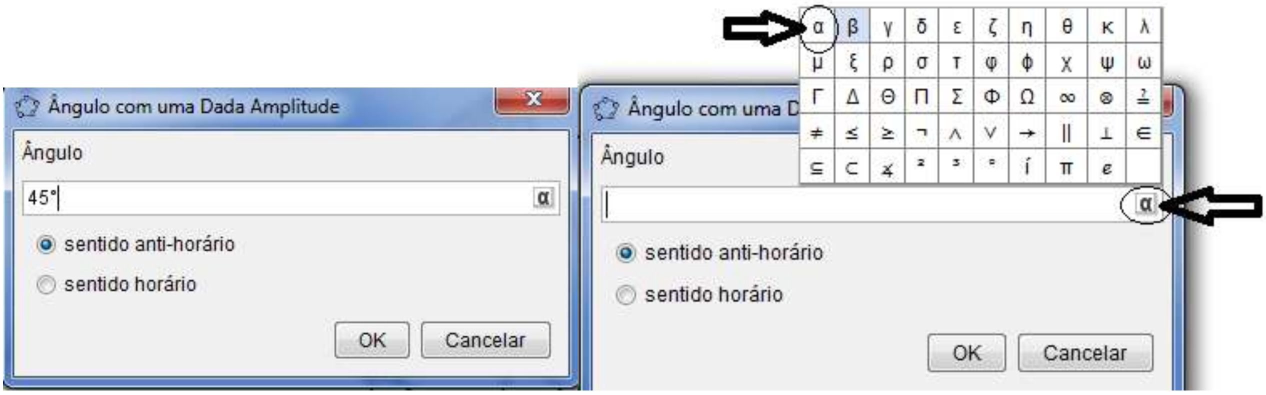
Os resultados apontaram que os alunos conseguiram estabelecer as relações e as propriedades através da observação das regularidades, no entanto evidenciaram dificuldades na comunicação das suas ideias. O GeoGebra revelou ser um instrumento propício para auxiliar o professor em sua prática pedagógica e contribuir, de forma significativa, na aprendizagem dos alunos, apresentando novos meios para o entendimento de conceitos e propriedades geométricas, sendo, deste modo, um facilitador para a formalização da relação entre as medidas dos ângulos inscritos numa Circunferência.

João Dantas Gomes Vaz
dantasmatt@gmail.com

27 E 28 DE JULHO DE 2017
1º DIA GEOGEBRA NA UNICV
SEMINÁRIO PARA A INSTALAÇÃO DO INSTITUTO GEOGEBRA

Ficha de Trabalho 1 — Estabelecer a relação existente entre um ângulo inscrito e o ângulo ao centro correspondente.

1. Abra o programa GeoGebra e ative a disposição Geometria.
2. Grave o ficheiro com o nome P1.ggb.
3. Crie um seletor r que varie entre 2 e 8.
4. Usando a *ferramenta* *circunferência (centro, raio)* construa uma circunferência de centro O e raio r. Para o centro O, selecione o centro, clique com o botão direito do rato e selecione “renomear”.
5. Use a *ferramenta seletor,* a = 2 . Construa um parâmetro α, ângulo, variando entre $o°$ e $180°$.
6. Recorrendo à ferramenta A , Novo ponto, marque um ponto sobre a circunferência. Selecione o ponto criado, clique com o botão direito do rato e selecione *renomear* como ponto A.
7. Recorra à *ferramenta* *, ângulo com uma dada amplitude* e selecione o ponto A, o centro O e defina o ângulo como sendo α.
8. Ao selecionar os pontos A e O, aparece a caixinha da Figura.



9. Apague o ângulo de $45°$e selecione α. O programa cria um ponto automático. Renomeie o ponto com o nome B.

8. Use a *ferramenta* *, segmento de reta (dois pontos)* e defina os segmentos $[OA]$ e $[OB]$. Obtendo desta forma o ângulo ao centro AOB.

9. Usando a *ferramenta novo ponto* A , Marque um ponto D sobre a circunferência.

10. Recorrendo a *ferramenta* *, segmento de reta (dois pontos)* defina os segmentos $[DA]$ e $[DB]$. Obtendo desta forma o ângulo inscrito ADB.

11. Altere as propriedades dos segmentos, clique com o botão direito do rato e selecione propriedades dos objetos e altere a cor e a espessura da linha.
12. Meça o ângulo $< ADB$, utilizando a *ferramenta*  *ângulo*.
13. Movimente o ponto D, sobre a circunferência, e descreva o que acontece com a medida dos ângulos central e inscrito.

14. Modifique o raio r, da circunferência, e registe as conclusões.

15. Mova o seletor α e registe as conclusões.

16. Qual a relação existente entre a amplitude de um ângulo inscrito e o ângulo ao centro correspondente?

17. Salve o ficheiro novamente.

Grupo:

Elementos:

Ficha de Trabalho 2 - Determinar a amplitude de um ângulo inscrito numa semicircunferência

1. Abra o programa GeoGebra e ative a disposição Geometria.
2. Grave o ficheiro com o nome P2.ggb.
3. Usando a f*erramenta semicircunferência (dois pontos)* construa uma semicircunferência de pontos A e B.
4. Use a *ferramenta* , *segmento de reta (dois pontos)* e defina o segmento $[AB]$ (diâmetro da semicircunferência).
5. Selecione a *ferramenta ponto médio ou centro* e clique sobre o segmento $[AB]$. Renomeie o ponto médio para O (Centro da semicircunferência).
6. Recorrendo a *ferramenta novo ponto* , marque um ponto C sobre a semicircunferência. Para o ponto C, selecione o ponto, clique com o botão direito do rato e selecione "renomear".
7. Use a *ferramenta* , *segmento de reta (dois pontos)* e defina os segmentos $[CA]$ e $[CB]$. Como é que se designa o ângulo ACB?______________________________
8. Utilizando a *ferramenta ângulo*, , determine a amplitude do ângulo $A\widehat{C}B$.
9. Movimente o ponto C, sobre a semicircunferência, e descreva o que acontece com a medida do ângulo $A\widehat{C}B$. O que parece acontecer sempre?

____

____

10. Estabeleça uma propriedade sobre ângulos inscritos numa semicircunferência.

____

____

11. Salve o ficheiro novamente.

Grupo: ____

Elementos: ____

____

Ficha de Trabalho 3 - Reconhecer as amplitudes de ângulos inscritos no mesmo arco de uma circunferência

1. Abra o programa GeoGebra e ative a disposição Geometria.
2. Grave o ficheiro com o nome P3.ggb.
3. Usando a *ferramenta* *circunferência (Centro, Raio)* construa uma circunferência de centro O e raio 3 por exemplo. Para o centro O, selecione o centro, clique com o botão direito do rato e selecione "renomear".
4. Usando a *ferramenta novo ponto* *,* marque os pontos A e B sobre a circunferência.
5. Recorrendo a *ferramenta* *, arco circular (centro dois pontos)* determine o arco menor AB, clicando no centro O, ponto A e o ponto B.
6. Clique com o botão direito do rato sobre o arco menor AB, propriedades dos objetos e altere a cor e a espessura da linha que delimita o arco.
7. Usando a ferramenta Novo Ponto , marque três pontos C, D e E sobre a circunferência.
8. Recorrendo a ferramenta , Segmento de Reta (Dois Pontos) defina os segmentos $[CA]$, $[CB]$, $[DA]$, $[DB]$, $[EA]$ e $[EB]$. Obtendo desta forma os ângulos inscritos ACB, ADB e AEB.
9. Meça os ângulos ACB, ADB e AEB, utilizando a *ferramenta ângulo,* .
10. Movimente os ponto C, D e E, sobre a circunferência, e descreva o que acontece com a medida dos ângulos.

11. Movendo os vértices dos ângulos e os extremos do arco correspondente, descreva a relação existente entre os ângulos inscritos e o arco correspondente?

12. Salve o ficheiro novamente.

Grupo:

Elementos:

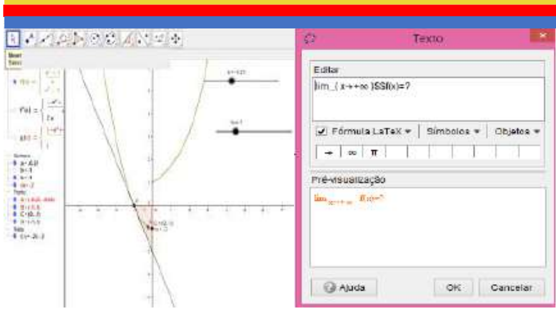
Estudo da função exponencial e logarítmica através de Geometria Dinâmica com recurso ao GeoGebra. António Henrique Silva

IGCV
Instituto GeoGebra na Universidade de Cabo Verde

ESPCR
Escola Secundária Politécnica Cristina Ramos

UNIVERSIDADE CABO VERDE
uni

Estudo de função exponencial e logarítmica através de Geometria dinâmica com recurso a Geogebra



Tema: Estudo de Função
Tópico: Estudo de função exponencial e logarítmica
Transversais/Competências: Representar o gráfico de uma função exponencial e logarítmica com recurso a Geogebra – estudo completo
Ano de Escolaridade: 12º Ano

Objetivos visados

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma sugestão didático-pedagógica que facilita no processo de ensino e aprendizagem de funções.

Objetivos específicos

- Representar o gráfico de uma função exponencial e logarítmica com recurso a Geogebra;
- Identificar as propriedades operatórias das funções exponenciais e logarítmicas;
- Determinar: o domínio, o contradomínio, zeros, monotonia, o sentido da concavidade, etc.

Enquadramento curricular e programático da tarefa

O surgimento deste trabalho vem no âmbito do programa de 12º ano relativamente ao estudo de função, que é o último tópico do programa do Ensino Secundário. Utiliza os conceitos de limites, de continuidades e da derivada para fazer o estudo completo de uma função

Descrição das tarefas

Primeiramente faz-se uma abordagem preliminar dos comandos das janelas de Geogebra e noção de alguns símbolos matemáticos necessários para o estudo de funções. A partir de uma função exponencial e logarítmica definida por ramos, os alunos vão utilizar as janelas de Geogebra para construção do gráfico. A partir do gráfico, os alunos vão determinar: o domínio, contradomínio, zeros, os extremos, os pontos de inflexão, determinação da primeira e segunda derivada e construir o quadro da variação.

Na segunda parte os alunos vão verificar se a função é continua e diferenciavel num ponto e determinar a equação da reta tangente. Os alunos vão através de Geogebra utilizar as fórmulas:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$; $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ e $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Avaliação

Os alunos serão avaliados todo o tempo. Nas atividades propostos, o professor deve preocupar-se com tempo na execução de cada tarefa; o manuseio dos comandos da Geogebra, a criatividade e o espírito de equipe.

No fim das atividades far-se-á uma discussão dos resultados chegados e uma análise SWOT do uso de Geogebra no estudo de função exponencial e logarítmica.

Conclusões

Nesta abordagem procurou-se, com o apoio do aplicativo Geogebra, apresentar um conjunto de atividades que vão de encontros aos conhecimentos adquiridos, proporcionando condições propícias para discussões e reflexões de aspetos geométricos e algébricos e criar novas conjunturas no estudo de funções com o aplicativo Geogebra. Durante as atividades, os alunos mostraram muito empenho, dinamismo e colocando sempre questões pertinentes e muito gosto em trabalhar com o aplicativo informático. Gerou no seio dos alunos competição, colaboração e trabalho de equipe. Por fim, uma grande vontade por parte dos discentes em aprender muito mais sobre a aplicação de Geogebra na Matemática e em outras áreas afins.

António Henrique Silva
tonysilva_ts@hotmail

Cidade da Praia, Cabo Verde
Junho de 2017
"USAR O GEOGEBRA PARA APRENDER E ENSINAR MATEMÁTICA
O GEOGEBRA E AS COMUNIDADES DE CONHECIMENTO AO SERVIÇO DO ENSINO, DA APRENDIZAGEM E DA MATEMÁTICA" (OLIVEIRA, 2011)
institutogeogebraunicv@gmail.com.

Ficha de Trabalho - Estudo de Funções envolvendo a função exponencial e logarítmica

1. Considere as seguintes funções reais de variáveis reais definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{1+e^{\frac{1}{x-2}}} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

   1.1. Represente-as graficamente usando como recurso o GeoGebra;
   1.2. Determine: domínio; contradomínio; zeros;
   1.3. Determine as assíntotas e conclua acerca de continuidade e diferenciabilidade;

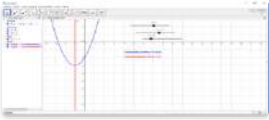
2. Seja *h* a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{\sqrt{3-x}-1}, & se\ x \geq 2 \\ \dfrac{\ln(x-1)-2x}{x}, & se\ < 2 \end{cases}$$

   2.1. Verifique que a função *h* é contínua à esquerda no ponto $x = 0$ mas não à direita;
   2.2. Esboce o gráfico de *h* utilizando as janelas do GeoGebra;
   2.3. Determine as equações das assíntotas ao gráfico de *h.*

Estudo da Função Quadrática com recurso ao Geogebra. Euclides Rodrigues, José Carvalho e Vanda Lopes

ESTUDO DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS COM RECURSO AO SOFTWARE *GeoGebra*



Tema: Função
Tópico: Função quadrática do tipo f(x)=a(x+m)^2+n
Capacidades transversais/Competências: Sentido de concavidade, eixo de simetria e coordnadas do vértice da parábola.
Nível Ensino/Ano: 10º Ano

OBJECTIVOS VISADOS

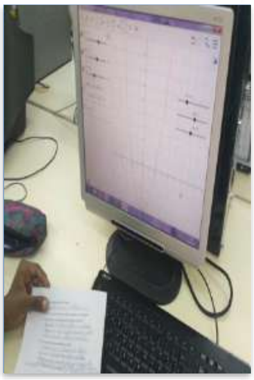
Orientar os alunos, mediante uma ficha de trabalho, a fazer uma investigação no *GeoGebr*a a cerca do sentido de concavidade, eixo de simetria, coordenadas do vértice e da obtenção do gráfico da função f(x)=a(x+m)^2+n , para diferentes valores de m e n, a partir do gráfico da função f(x)=ax^2.

ENQUADRAMENTO CURRICULAR E PROGRAMÁTICO DA TAREFA

Esta tarefa enquadra-se na unidade didática Funções, do programa de Matemática para o 2º ano do 1º ciclo do Ensino Secundário. Permite aos alunos coompreenderer o sentido de concavidade de uma parábola conhecendo apenas o coeficiente do termo de grau 2, indicar as coordenadas do vértice, escrever a equação do eixo de simetria e construir gráfico da função f(x)=a(x+m)^2+n, a partir do gráfico da função f(x)=ax^2

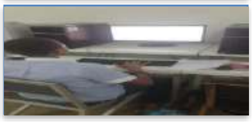
DESCRIÇÃO DA TAREFA

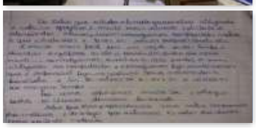
A experiência foi realizada com alunos do 10º ano em 3 Escolas Públicas do país: ESCS (15 alunos), ESML (38 alunos) e LDR (10 alunos) e foi orientado por 3 professores de Matemática das respetivas escolas.
No primeiro momento foram dadas a conhecer ferramentas do *GeoGebra* de forma a garantir os pré-reuisitos mínimos para a realização das tarefas.
Todos os alunos participaram ativamente na exploração e investigação dos conteúdos. Após a realização das tarefas, ouviu-se as ilações dos alunos mediante uma discussão e treflexão que culminou com uma síntese do tópico abordado.

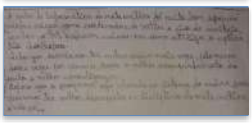


AVALIAÇÃO

Os alunos foram avaliados tendo em conta a realização das tarefa, as respostas dadas na ficha, a capacidade de comunicação e de unir as suas visuaizações com o pensamento analítico.
Pelas ilações dos alunos verificou-se que os objetivos do conteúdo foram atingidos e que os mesmos apresentam maior problema na comunicação e em escrever analiticamente aquilo que observaram no ecrã do computador.
No final da experiência os alunos foram desafiados a fazer uma avaliação da experiência, mediante uma exposição escrita, onde se verificou que os resultados obtidos foram bastantes positivos. Pois, estes são unânimes em afirmar que a experiência foi muito boa, interessante e frutífera. Apontam como principais vantagens a metodologia implementada, a motivação e o interesse pelas aulas de Matemática. Ainda defendem que o *GeoGebra* apresenta valor e potencial educativo que permitem atingir os objetivos do conteúdo estudado e que o mesmo se adapta a abordagem utilizada e por isso, deve ser implementado no currículo escolar.







CONCLUSÕES

Uma vez mais ficou claro que o *GeoGebra* pode afigurar-se como uma potencial ferramente para a evolução do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, na medida em que proporciona formas de trabalho alternativo e suficientemente aliciantes para que as aprendizagens se tornem cada vez mais significativas. Pois, quando se aborda tópicos de Matemática utilizando *GeoGebra* os alunos têm a possibilidade de tornar-se personagens ativas no processo de ensino e de aprendizagem, descobrindo e desenvolvendo o gosto pela disciplina. Assim, as fichas e/ou tarefas devem ser orientadas de modo a proporcinar uma aprendizagem ativa e colaborativa. Isto reforça a importância da implementação do IGCV e a necessidade de se investir, fortemente, na formação e/ou reciclagem dos professores da disciplina, para que abordagens didáticas como as pensadas no génese desta experiência possam, realmente, se efetivar.

Euclides Rodrigues
José Carvalho
Vanda Lopes

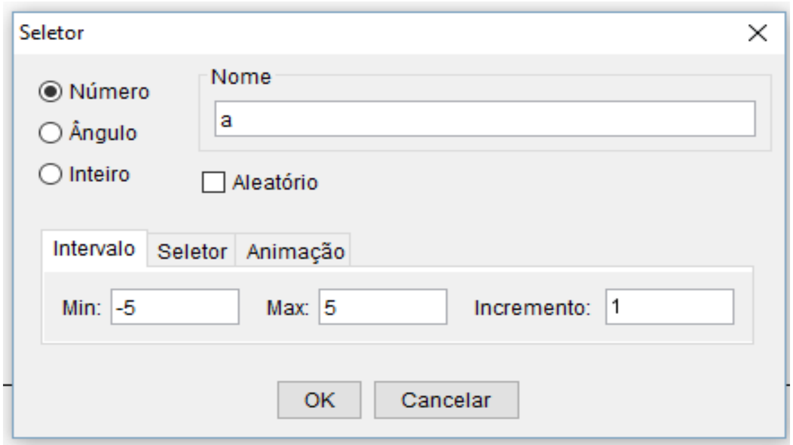
27 E 28 DE JULHO DE 2017
1º DIA GEOGEBRA NA UNICV
SEMINÁRIO PARA A INSTALAÇÃO DO INSTITUTO GEOGEBRA NA UNICV

www.unicv.edu.cv

Ficha de Trabalho - Estudo da função quadrática

1. Abra o GeoGebra.
2. Prepare o GeoGebra de modo a exibir as duas folhas (*Algébrica* e *Gráfica 2D*).
   2.1. No menu vista, escolha *Folha Algébrica* e *Folha Gráfica 2D*.
   2.2. Clique com o botão direito numa área livre da *Folha Gráfica* e escolha *Grelha*.
3. Usando a *ferramenta seletor* 

construa o parâmetro a, número, variando entre -5 a 5 com incremento 1 (veja a figura abaixo).



4. Repita o mesmo procedimento para construir os parâmetros m e n, número, variando entre -5 a 5 com incremento 1.
5. Na barra de entrada digite a seguinte função: $\mathrm{f(x) = a*(x + m)^\wedge 2 + n}$ e pressione enter.
   5.1. Clique com o botão esquerdo sobre o seletor a e arraste-o nos dois sentidos. (Esquerda-Direita).
   5.2. Clique com o botão direito sobre o seletor a e escolha a opção *Animar*.
   5.3. Pressione ctrl+z para parar a animação.
   5.4. O que acontece com a parábola quando se desloca o seletor a?
   5.5. O que acontece com a gráfico/parábola quando $a = 0$?
   5.6. Que conclusão pode tirar acerca do parâmetro a?
6. Na caixa de entrada digite $m = 0$, pressione enter e $n = 0$, pressione enter.
   6.1. Indique as coordenadas do vértice.
   6.2. Eixo de simetria.

7.

   7.1. Clique com o botão esquerdo sobre o seletor m e arraste-o nos dois sentidos.

   7.2. Clique com o botão direito sobre o seletor a e escolha a opção *Animar*.

   7.3. Pressione ctrl+z para parar a animação.

   7.4. O que acontece com a parábola quando se desloca o seletor m?

   7.5. O que concluir sobre as coordenadas do vértice?

   7.6. O que concluir sobre o eixo de simetria?

   7.7. Como obter o gráfico da função $\mathrm{f(x) = a{*}(x + m)^2}$ a partir do gráfico da função $\mathrm{f(x) = ax^2}$

8. Na caixa de entrada digite $m = 0$ e pressione enter.

   8.1. Clique com o botão esquerdo sobre o seletor n e arraste-o nos dois sentidos.

   8.2. Clique com o botão direito sobre o seletor n e escolha a opção *Animar*.

   8.3. Pressione ctrl+z para parar a animação.

   8.4. O que acontece com a parábola quando se desloca o seletor n ?

   8.5. O que concluir sobre as coordenadas do vértice?

   8.6. O que concluir acerca do eixo de simetria?

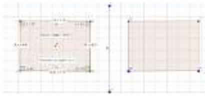
   8.7. Como obter o gráfico da função $\mathrm{f(x) = ax^2 + n}$ a partir do gráfico da função $\mathrm{f(x) = ax^2}$?

9. Clique com o botão direito sobre o seletor a e escolha a opção *Animar*.
10. Clique com o botão direito sobre o seletor m e escolha a opção *Animar*.
11. Clique com o botão direito sobre o seletor n e escolha a opção *Animar*.
12. O que concluir acerca das coordenadas do vértice?
13. O que concluir acerca do eixo de simetria?
14. Como obter o gráfico da função $\mathrm{f(x) = a{*}(x + m)^2 + n}$ a partir do gráfico da função $\mathrm{f(x) = ax^2}$?

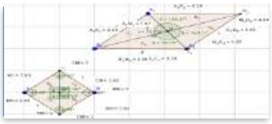
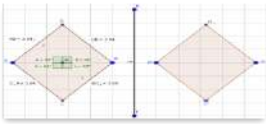
Estudo da Geometria. José Pedro Almeida Ganeto, Maria da Conceição Costa, Maria João Silva Gonçalves e Samira Santos Duarte

Instituto GeoGebra na Universidade de Cabo Verde

UNIVERSIDADE CABO VERDE



Estudo da Geometria

Tema: GeoGebra no Estudo da Geometria
Tópico: Quadriláteros
Capacidades transversais/Competências: Resolução de situação-problema, envolvendo a construção geométrica, retas paralelas, retas concorrentes e quadriláteros.
Nível Ensino/Ano: 2º Ano do 2º Ciclo do Ensino Básico

OBJETIVOS VISADOS

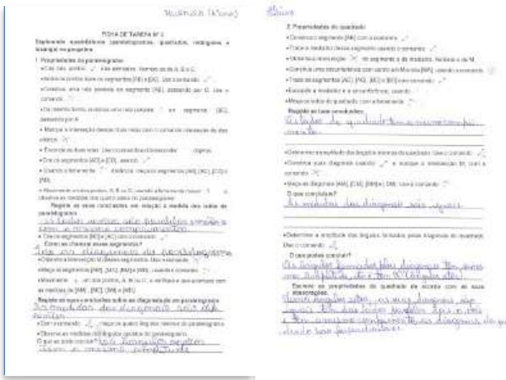
Reconhecer as vantagens da utilização do GeoGebra no ensino e aprendizagem da geometria para a descoberta de noções, a aplicação de conceitos e a avaliação de conhecimentos matemático. Pretende-se com esta atividade que os alunos devem ser capazes de resolver uma situação-problema, envolvendo a construção geométrica, retas paralelas, retas concorrentes e quadriláteros, com recurso ao Software GeoGebra.

ENQUADRAMENTO CURRICULAR E PROGRAMÁTICO DA TAREFA

Esta tarefa enquadra-se no tema Geometria e Medidas, do programa de Matemática do 2º ano do 2º ciclo do ensino básico de escolaridade, e permite aos alunos resolverem uma situação-problema, envolvendo a construção geométrica, retas paralelas, retas concorrentes, quadriláteros, bem como os conceitos de área e volume. A partir da construção dos quadriláteros o aluno é capaz de identificar as suas propriedades (lados paralelos e perpendiculares, diagonais, ângulos).

DESCRIÇÃO DA TAREFA

Apresentação e execução das tarefas com o uso do Software GeoGebra em 6 sessões de 50 minutos, em que os alunos resolveram fichas individualmente e em pares envolvendo: Familiarização com o GeoGebra, Retas paralelas, Retas concorrentes, Exploração de quadriláteros no GeoGebra (trapézios, paralelogramos quadrados, losangos e retângulos), Diagonais dos quadriláteros, Perímetro e área de figuras planas, Reflexão (simetria). Seguia-se a avaliação das tarefas realizadas na sala de aula e a síntese das mesmas.
Posteriormente fez-se a recolha dos dados dos questionários. A análise do conteúdo foi a metodologia utilizada para tratar os questionários, dando base a sua interpretação e análise, tendo em conta os objetivos da investigação. O questionário teve como objetivo explanar a perceção do público-alvo, bem como a sua caraterização para a organização da presente investigação. O questionário foi aplicado aos alunos, tendo os dados recolhidos, sido tratados e sistematizados com recurso informático, nomeadamente o Software SPSS



AVALIAÇÃO

No que se refere à avaliação das crianças, preocupou-se com o modo como elas se relacionavam connosco, bem como a sua reação às propostas de atividades. Neste sentido, os instrumentos de avaliação utilizados foram os seguintes:

- ✓Autoavaliação;
- ✓Observação direta da capacidade expressiva, da criatividade, do interesse e da autonomia dos alunos;
- ✓Registos escritos da participação e do comportamento perante as atividades;
- ✓Diálogo com as crianças;
- ✓Análise dos resultados;
- ✓Registo fotográfico

Podemos afirmar que os resultados obtidos foram positivos, uma vez que houve muita interação dos alunos na prática das tarefas desenvolvidas.






CONCLUSÕES

O recurso às novas tecnologias pode ter uma dimensão bem interessante por poder ir além do ensino tradicional, onde o professor programa atividades e avalia o aluno pelo seu empenho nesse processo. As tarefas desenvolvidas com o GeoGebra provaram que é possível ensinar Geometria de forma ativa, fascinante e atrativa, onde o aluno participa, interage com os colegas e, através das suas construções, vai formulando o seu próprio conhecimento. Tudo isso contribui para o aumento das habilidades e potencialidades dos educandos.

Autores ou implementadores da tarefa:
José Pedro Almeida Ganeto / alganeto@gmail.com
Maria da Conceição Costa/ Sousa/costasousasao@gmail.com
Maria João Silva Gonçalves/ silvamaria73@hotmail.com
Samira Santos Duarte/ samsduarte24@gmail.com

27 E 28 DE JULHO DE 2017
1º DIA GEOGEBRA NA UNICV
SEMINÁRIO PARA A INSTALAÇÃO DO INSTITUTO GEOGEBRA NA UNICV

uni www.unicv.edu.cv

Ficha de Trabalho I - Explorando o GeoGebra

1. Clique com o botão direito do rato na zona gráfica, seleciona a vista grelha e com a *ferramenta novo ponto* marque quatro pontos não colineares.
2. Una esses pontos entre si utilizando a *ferramenta segmento* definido por dois pontos de modo a obter uma figura.
3. Que figura construiu?____
4. Construa outros polígonos com o mesmo número de lados utilizando a *ferramenta polígono* .
5. Utilizando a *ferramenta mover* , mova os polígonos e registe as conclusões a que chegou.____
6. Usando a *ferramenta distância* ou *comprimento*, , determine a medida do comprimento dos lados e o perímetro de cada figura.

Ficha de Trabalho II - Explorando quadriláteros (trapézios) no GeoGebra

A segunda tarefa aplicada “Explorando quadriláteros no GeoGebra (trapézios) ”, os objetivos preconizados foram identificar as propriedades dos trapézios, identificar trapézios isósceles, trapézios escalenos e retângulos. Para execução dessa atividade, aproveitou-se os conhecimentos que os alunos possuíam acerca do s mesmos. Aproveitando da tarefa anterior, os alunos identificaram os trapézios construídos, bem como as suas propriedades (dois lados paralelos).

1. Clique com o botão direito do rato na *zona gráfica*, selecione a vista grelha e com a *ferramenta novo ponto* marque quatro pontos não colineares.
2. Una esses pontos entre si utilizando a ferramenta polígono de modo a obter um quadrilátero.
3. Construa outro quadrilátero:
   - 3.1. trace o segmento [AB] com a *ferramenta segmento de reta* ;
   - 3.2. marque o ponto C e trace uma reta paralela, com a *ferramenta reta paralela*, ao segmento [AB] passando por esse ponto;
   - 3.3. marque outro ponto sobre a paralela criada, com a *ferramenta novo ponto* ;

3.4. esconda a reta paralela usando a *ferramenta mostrar/esconder objetos* ;

3.5. trace os segmentos [BC], [CD] e [DA] usando a *ferramenta segmento de reta* .

4. Movimente os vértices do quadrilátero usando a *ferramenta mover*, e responda às seguintes questões:

4.1. Quantos segmentos paralelos o quadrilátero possui?

4.2. Que nome dá ao quadrilátero que tem apenas dois lados paralelos?

4.3. Discuta com os seus colegas se existem outros tipos de trapézios.

4.3.1. Quais são os diferentes tipos de trapézios?

5. Use a *ferramenta ângulo* , para medir a amplitude dos ângulos internos dos trapézios.

Ficha de Trabalho III - Explorando quadriláteros (paralelogramos, quadrados, retângulos e losango) no GeoGebra.

1. Propriedades do paralelogramo

1.1. Crie três pontos não-alinhados, com a *ferramenta novo ponto* . Nomeie-os de A, B e C.

1.2. Sobre os pontos trace os segmentos [AB] e [BC]. Use a *ferramenta segmento de reta* .

1.3. Construa uma reta paralela ao segmento [AB], passando por C. Use a *ferramenta reta paralela* . Da mesma forma, construa uma reta paralela ao segmento [BC], passando por A.

1.4. Marque a interseção dessas duas retas com a *ferramenta interseção de dois objetos* .

1.5. Esconda as duas retas. Use a *ferramenta mostrar/esconder objetos* .

1.6. Crie os segmentos [AD] e [CD], usando .

1.7. Usando a *ferramenta distância* , meça os segmentos [AB], [BC], [CD] e [AD].

1.8. Movimente um dos pontos, A, B ou C, usando a *ferramenta mover,* , e observe as medidas dos quatro lados do paralelogramo.

1.9. Registe as suas conclusões em relação à medida dos lados do paralelogramo.

____

1.10. Crie os segmentos [BD] e [AC] usando .

1.11. Como se chamam esses segmentos?

____

1.12. Obtenha o ponto de intersecção M desses segmentos com a ferramenta, .

1.13. Meça os segmentos [AM], [MC], [BM] e [MD], usando .

1.14. Movimente um dos pontos, A, B ou C, com a *ferramenta mover*, ,e verifique o que acontece com as medidas de [AM] , [MC], [BM] e [MD] .

1.15. Registe as suas conclusões sobre as diagonais de um paralelogramo.

____

1.16. Com a ferramenta, , meça os quatro ângulos internos do paralelogramo.

1.17. Observe as medidas dos ângulos opostos do paralelogramo. O que se pode concluir? ____

2. Propriedades do quadrado

2.1. Construa o segmento [AB] usando .

2.2. Trace a mediatriz desse segmento usando a ferramenta, .

2.3. Obtenha a intersecção do segmento e da mediatriz, usando . Nomeie-o de M.

2.4. Construa uma circunferência com centro em M e raio [MA], usando .

2.5. Obtenha a intersecção da circunferência com a mediatriz, usando .

2.6. Trace os segmentos [AD], [AC], [BC] e [BD], usando .

2.7. Esconda a mediatriz e a circunferência, usando .

2.8. Meça os lados do quadrilátero, com a ferramenta .

2.9. O que se pode concluir?____

2.10. Determine a amplitude dos ângulos internos do quadrado usando .

2.11. Construa as suas diagonais, usando , e marque a intersecção M, com .

2.12. Meça as diagonais [AB] e [CD] usando a ferramenta . O que se pode concluir?

2.13. Determine a amplitude dos ângulos formados pelas diagonais do quadrado. Use a ferramenta . O que pode concluir ?

2.14. Escreva as propriedades do quadrado de acordo com as suas observações.

3. Propriedades do losango

3.1. Crie um segmento [AB]. usando .

3.2. Trace a mediatriz desse segmento, com a ferramenta .

3.3. Marque o ponto de interseção da mediatriz com o segmento, usando e nomeie-o de M.

3.4. Crie um ponto sobre qualquer lugar da mediatriz, usando . Nomeie-o de C.

3.5. Construa uma circunferência com centro em M e raio [MC], usando .

3.6. Marque o ponto D na interseção da mediatriz com a circunferência.

3.7. Esconda a mediatriz e a circunferência usando a ferramenta .

3.8. Com a ferramenta , trace os segmentos [AC], [BC], [AD] e [AD] formando os lados do losango.

3.9. Marque a diagonal [CD] com a ferramenta .

3.10. Usando , meça os lados e as diagonais do losango.

3.11. Meça a amplitude dos ângulos formado pelas diagonais, usando .

3.12. Usando o mover , movimente o quadrilátero.

3.13. Escreva as suas conclusões em relação às medidas dos lados, medidas das diagonais e dos ângulos formados pelas diagonais.

4. Propriedades do retângulo

4.1. Crie um segmento [AB], usando a ferramenta .

4.2. No ponto A construa uma reta perpendicular a [AB]. Usa a ferramenta .

4.3. Construa um segmento [AC] sobre a reta.

4.4. Construa no ponto C, uma paralela a [AB], usando a ferramenta .

4.5. Pelo ponto B construa uma reta perpendicular a [AB], usando .

4.6. Obtenha a interseção D dessas retas, com .

4.7. Esconda as retas, usando .

4.8. Trace o segmento que falta, criando o quadrilátero [ABCD].

4.9. Meça os segmentos com a ferramenta .

4.1. Usando mover , movimente um dos pontos A, B ou C e observe as medidas dos lados do retângulo.

4.2. Escreva as observações em relação à medida dos lados de retângulo.

4.3. Determine a amplitude dos ângulos internos desse retângulo usando .

4.4. Com a ferramenta mover, , movimente o retângulo por um dos pontos A, B ou C. Registe as suas conclusões.

4.5. Construa as diagonais e marca a intersecção M das diagonais [AD] e [BC].

4.6. Meça os segmentos [AM], [MC], [BM] e [MD], usando .

4.7. Movimente um dos pontos, A, B ou C , usando , e verifique o que aconteça com as medidas de [AM], [MC], [BM] e [MD]. O que podemos dizer a respeito das diagonais do retângulo?

4.8. Quais são as propriedades do retângulo?

4.9. Todo o retângulo é um paralelogramo?

5. Eixos de simetrias dos quadriláteros

    5.1. Aproveite os quadriláteros construídos e esconda as diagonais usando .

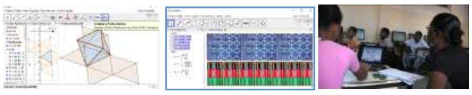
    5.2. De entre estes escolha apenas três contorne-os utilizando a *ferramenta polígono*.

    5.3. Ao lado de cada um trace uma reta com a ferramenta reta .

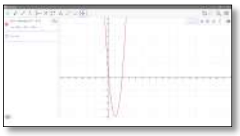
    5.4. Usando a *ferramenta reflexão axial*, , determine a reflexão dos polígonos.

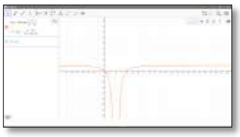
    5.5. Investigue quais os polígonos que tem simetria axial.

Estudo da monotonia de funções reais com recurso ao GeoGebra. José Mendes da Costa



Estudo da monotonia de funções reais com recurso ao GeoGebra.





Tema: Derivada de Funções Reais de Variável Real
Tópico: Monotonia de F. R. V. R.
Capacidades transversais/Competências: Estudo da variação da monotonia de uma função (crescimento e decrescimento)
Nível Ensino/Ano: 12º

OBJETIVOS VISADOS

Nessa tarefa preconiza-se proporcionar aos alunos, outros ambientes de aprendizagem, nomeadamente aqueles que facilitam a visualização e a manipulação dos conceitos para que estes sejam mais significativos. Assim pretende-se comparar o uso do GeoGebra com as metodologias tradicionais de ensino/aprendizagem no estudo do tópico monotonia de funções

ENQUADRAMENTO CURRICULAR E PROGRAMÁTICO DA TAREFA

Esta tarefa enquadra-se no tema Derivadas do programa de Matemática do 12º ano de escolaridade. É uma das aplicações matemáticas da derivada, o estudo da monotonia de funções reais de variável real. Conceitos teóricos relacionam o sinal da função derivada de uma função com a sua monotonia. Com efeito, tradicionalmente a estratégia utilizada para o estudo da monotonia de uma função consiste na construção e análise de uma tabela de sinal.

DESCRIÇÃO DA TAREFA

Implementou-se a tarefa em três etapas.
Na primeira, foi distribuída aos alunos uma ficha que consistia no estudo da monotonia de funções (uma função polinomial e uma outra função algébrica fracionária), usando a estratégia tradicional de construir a tabela de sinal da derivada de uma função.
Na segunda etapa da aula, fase de familiarização com o GeoGebra, foi apresentado o software, suas funções e a sua importância. Os alunos puderam fazer rápidas explorações nas janelas Gráfica, Algébrica e CAS do GeoGebra.
Na terceira etapa da aula, os alunos receberam uma ficha com duas funções de mesma natureza para estudar a monotonia. A diferença aqui era que o aluno devia esboçar o gráfico da derivada da função no GeoGebra e descrever a monotonia da função a partir da interpretação gráfica do sinal da sua derivada.
No final recolheram-se as fichas e seguiu-se um momento de apresentação dos trabalhos, partilha de experiencia, tendo proporcionado ao aluno expressar a sua opinião sobre o impacto do uso dessa ferramenta na sua aprendizagem.

AVALIAÇÃO

Os alunos foram avaliados pelas respostas apresentadas nas fichas de trabalho. Cada tarefa foi avaliada individualmente (com uma classificação de 0 a 100 %) e em comparação com uma tarefa semelhante em que se usou uma abordagem diferente. Confirmou-se a hipótese da melhoria dos resultados com o uso de GeoGebra.
Em geral houve uma melhoria nos resultados, em mais de 10% quando se passou da metodologia tradicional para o uso do GeoGebra.
A nível individual destaca-se casos em que os alunos melhoraram o seu desempenho em até 40%.
Os alunos avaliaram a aula e o software como extremamente "interessante" e "proveitoso". Na opinião de alguns alunos, esta estratégia de ensino e aprendizagem exploratória é um exemplo "para repetir mais vezes".

CONCLUSÕES

•GeoGebra é uma mais-valia para os professores de Matemática tanto pelos
•vários recursos que apresenta para auxiliar o professor no ensino da disciplina de matemática.
Os alunos demonstram grande interesse pelo GeoGebra e exploraram com sucesso várias ferramentas que lhes permitiram aprender os conceitos em estudo. Tiveram maior atenção nas aulas com suporte do GeoGebra e revelaram grande facilidade em manipular e alcançar conceitos teóricos. Dada a importância do uso do software para a promoção da aprendizagem, conclui-se que este deve ser usado desde os anos inicias do estudo da Matemática ao nível do ensino superior.

José Mendes da Costa
jose.costa@student.unicv.edu.cv

27 E 28 DE JUNHO DE 2017
1º DIA GEOGEBRA NA UNICV
SEMINÁRIO PARA A INSTALAÇÃO DO INSTITUTO GEOGEBRA NA UNICV

www.unicv.edu.cv

Ficha de Trabalho 1 — Estudo da monotonia de funções reais de variáveis reais

Estudo da monotonia da função com recurso à tabela de sinal.

Tarefa 1.

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Sabendo que a derivada de f é definida por $f'(x) = 3x^2 - 6x$, estude a monotonia da função.

Tarefa 2.

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$.

Sabendo que a derivada de f é definida por $f'(x)\frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$, estude a monotonia da função.

Ficha de Trabalho 2 — Estudo da monotonia de funções reais de variáveis reais

Estudo da monotonia da função com recurso ao GeoGebra.

Tarefa 3.

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 2x^3 - 6x^2$.

Obtenha o gráfico da função derivada de f e estude a monotonia da função.

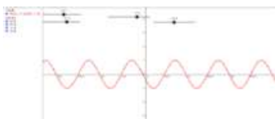
Tarefa 4.

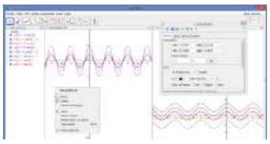
Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

Obtenha o gráfico da função derivada de f e estude a monotonia da função.

Escola Secundária Amor de Deus

Função trigonométrica: Co-seno





Tema: Trigonometria

Tópico: Funções trigonométricas

Capacidades transversais/Competências: Análise dos parâmetros na função $f(x) = a\cos(bx + c) + d$ em relação ao gráfico da função $f(x) = \cos(x)$.

Ano de Escolaridade: 11º Ano

Objetivos visados

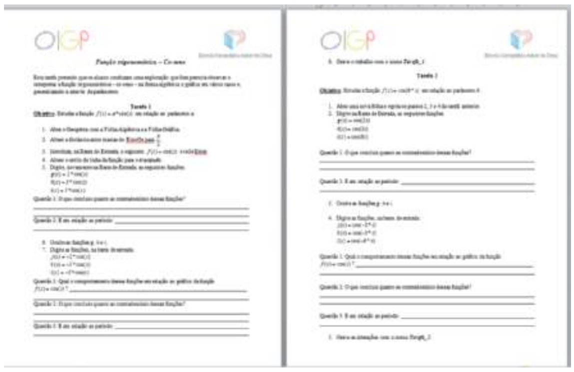
- ✓ ***Fazer o estudo de uma função trigonométrica;***
- ✓ ***Conhecer as razões trigonométricas no círculo trigonométrico***
- ✓ ***Interpretar uma função trigonométrica em relação aos "parâmetros" na função*** $f(x) = a\cos(bx + c) + d$

Enquadramento curricular e programático da tarefa

*•Esta tarefa enquadra-se no tema Trigonometria, do programa de Ensino de Matemática do 11º ano de escolaridade, e permite aos alunos compreenderem e interpretarem graficamente uma função trigonométrica. O aluno é capaz de fazer um estudo da função trigonométrica Co-seno (por exemplo) em relação a qualquer um dos parâmetros **a, b, c** e **d** da função f(x)=**a***cos(**b***x+**c**)+**d** comparando com a função f(x)=cos(x).*

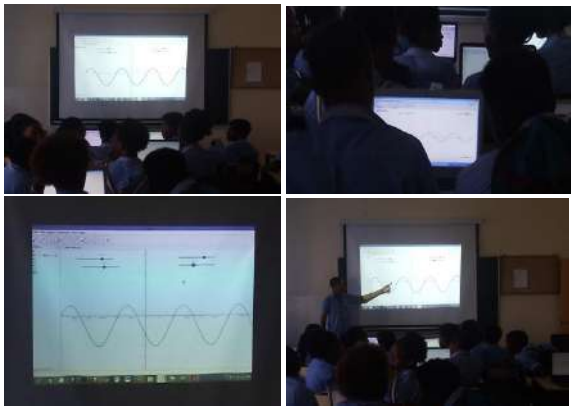
Descrição da tarefa

Visto ser o primeiro contato com esse software, foi dada aos alunos os conhecimentos básicos para o seu uso, onde começariam a resolver pequenas tarefas utilizando algumas ferramentas.
A turma consta um total de 24 alunos, distribuídas em grupos de 3, visto haver apenas 8 computadores. No entanto, todas as tarefas foram realizadas e projetadas para o melhor acompanhamento de todos.
Durante todas as aulas (7), todos mostraram total interesse e intervindo com questões e análises de diversas tarefas.
Por fim, no estudo da função co-seno, em relação aos parâmetros indicados, tiveram que analisar e concluir (graficamente) as caraterísticas dessa função em relação à função co-seno.



Avaliação

A avaliação foi feita através das respostas/análises dos alunos numa das fichas de trabalho.
*Os objetivos foram alcançados, visto que todos conseguiram diferenciar as principais `caraterísticas` da função co-seno em relação à função f(x)=a*cos(b*x+c)+d. Não houve nenhuma dificuldade na realização das tarefas; porém alguns mostraram alguma dificuldade nas respostas /conclusões em relação às interpretações.*
No final, todos mostraram-se satisfeitos com o uso do Geogebra; deram nota positiva a essa forma de aprender a trigonometria através da geometria dinâmica.



Conclusões

Não restaram dúvidas que são uma mais valia e necessária o uso de novas tecnologias no ensino-aprendizagem de Matemática. Através do Geogebra é possível estudar vários conteúdos baseando nas suas ferramentas, realizando várias atividades que permitem, posteriormente, chegar a conclusões depois de interpretações/discussões dos resultados. Os meus alunos notaram claramente as vantagens do uso desse software principalmente no estudo gráfico de uma função.

Walter Francisco Mendes Fernandes

27 e 28 de Julho de 2017
Seminário para a instalação do Instituto Geogebra na Uni-CV

Ficha de trabalho — Função trigonométrica – Co-seno

Esta tarefa pretende que os alunos conduzam uma exploração que lhes permita observar e interpretar a função trigonométrica – co-seno – na forma algébrica e gráfica em vários casos e, generalizando-a através de parâmetros.

Tarefa 1 — Objetivo: Estudar a função $f(x) = a * \cos(x)$ em relação ao parâmetro a.

1. Abra o GeoGebra com a *Folha Algébrica* e a *Folha Gráfica*.
2. Altere a distância entre marcas do EixoOx para $\pi/2$.
3. Introduza, na *Barra de Entrada*, o seguinte: $f(x) = cos(x)$ e tecle Enter.
4. Altere o estilo de linha da função para o tracejado.
5. Digite, novamente na *Barra de Entrada*, as seguintes funções: $g(x) = 2 * cos(x)$; $h(x) = 3 * cos(x)$; $i(x) = 5 * cos(x)$.

   Questão 1: O que conclui quanto ao contradomínio dessas funções?

   ____

   Questão 2: E em relação ao período?

   ____

6. Oculte as funções g, h e i.
7. Digite as funções, na *Barra de Entrada*: $j(x) = -2 * cos(x)$; $k(x) = -3 * cos(x)$; $l(x) = -5 * cos(x)$.

   Questão 1: Qual o comportamento dessas funções em relação ao gráfico da função $f(x) = cos(x)$?

   ____

   Questão 2: O que conclui quanto ao contradomínio dessas funções?

   ____

   Questão 3: E em relação ao período?

   ____

8. Grave o trabalho com o nome Tarefa_1.

Tarefa 2 — <u>Objetivo</u>: Estudar a função $f(x) = cos(b * x)$ em relação ao parâmetro *b*.

1. Abra uma nova folha e repita os passos 2, 3 e 4 da tarefa anterior.
2. Digite na *Barra de Entrada*, as seguintes funções: $g(x) = cos(2 * x)$; $h(x) = cos(3 * x)$; $i(x) = cos(6 * x)$.
   2.1. Questão 1: O que conclui quanto ao contradomínio dessas funções?

   ____

   2.2. Questão 2: E em relação ao período?

   ____

3. Oculte as funções g, h e i.
4. Digite as funções, na barra de entrada: $j(x) = cos(-2 * x)$; $k(x) = cos(-3 * x)$; $l(x) = cos(-6 * x)$.
   4.1. Questão 1: Qual o comportamento dessas funções em relação ao gráfico da função $f(x) = cos(x)$?

   ____

   4.2. Questão 2: O que conclui quanto ao contradomínio dessas funções?

   ____

   4.3. Questão 3: E em relação ao período?

   ____

5. Grave as alterações com o nome Tarefa_2.

Tarefa 3 — <u>Objetivo</u>: Estudar a função $f(x) = cos(x + c)$ em relação ao parâmetro *c*.

1. Abra uma nova folha e repita os passos 2, 3 e 4 da Tarefa 1.
2. Digite na *Barra de Entrada*, as seguintes funções: $g(x) = cos(x + 1)$; $h(x) = cos(x - 1)$; $i(x) = cos(x + 4)$.
   2.1. Questão 1: Qual o comportamento dessas funções em relação ao gráfico da função $f(x) = cos(x)$?

   ____

   2.2. Questão 2: O que conclui quanto ao contradomínio dessas funções?

   ____

   2.3. Questão 3: E em relação ao período?

   ____

3. Grave as alterações com o nome Tarefa_3.

Tarefa 4 - <u>Objetivo</u>: Estudar a função $f(x) = cos(x) + d$ **em relação ao parâmetro *d*.**

1. Abra uma nova folha e repita os passos 2, 3 e 4 da tarefa 1.
2. Digite na *Barra de Entrada*, as seguintes funções: $g(x) = cos(x) + 1$; $h(x) = cos(x) + 3$; $i(x) = cos(x) - 2$; $j(x) = cos(x) - 4$.
   2.1. Questão 1: Qual o comportamento dessas funções em relação ao gráfico da função $f(x) = cos(x)$?

   ____

   2.2. Questão 2: O que conclui quanto ao contradomínio dessas funções?

   ____

   2.3. Questão 3: E em relação ao período?

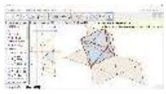
   ____

3. Grave as alterações com o nome Tarefa_4.

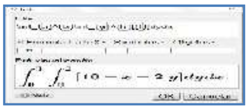
Tarefa 5 — Objetivo: Estudar a função $f(x) = a\cos(bx + c) + d$ **em relação aos parâmetros a, b, c e d.**

1. Abra uma nova folha e repita os passos 2, 3 e 4 da tarefa 1.
2. Crie os parâmetros a, b, c e d com a *ferramenta seletor* a = 2.
3. Digite o comando $f(x) = a * cos(b * x + c) + d$ e tecle Enter.
4. Com a ferramenta mova os seletores.
5. Observe o comportamento do gráfico em em relação ao:
   5.1. seletor a:____
   5.2. seletor b:____
   5.3. seletor c:____
   5.4. seletor d:____

Funções de duas variáveis - Gráfico, Curva de Nível, Integração e Volume. João Manuel Fortes cruz



FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS – GRÁFICO, CURVA DE NÍVEL, INTEGRAÇÃO E VOLUME




Tema: Funções de Duas Variáveis

Tópico: Integral Dupla – Teorema de Fubini – Volume por Integração

Capacidades transversais/Competências: Desenvolvimento do conhecimento e interação construtiva entre este e a aprendizagem, dentro de um ambiente estimulante e motivador.

Nível Ensino/Ano: Ensino Superior

OBJECTIVOS VISADOS

Propor o reconhecimento das potencialidades do software Geogebra na resolução de questões matemáticas que integrem representação gráfica em funções de duas variáveis, representação imagem do domínio das mesmas e sua integração. Chamar a atenção e levar ao conhecimento dos senhores professores e dos senhores responsáveis envolvidos na elaboração dos conteúdos curriculares, das potencialidades deste maravilhoso software que é o GeoGebra e da necessidade, urgente, da sua introdução como ferramenta imprescindível na didática do ensino da matemática em Cabo Verde.

ENQUADRAMENTO CURRICULAR E PROGRAMÁTICO DA TAREFA

O estudo da Função de Duas Variáveis é um conteúdo da grelha curricular do Plano de Estudos do Ensino Superior em algumas Universidades do País: O software GeoGebra oferece recursos didáticos que facilitam o seu ensino, bem como o seu aprendizado.

DESCRIÇÃO DA TAREFA

A experiência concretizou-se em um briefing de três reuniões (perfazendo uma carga horária total de 10 horas), para cinco professores, incluindo o autor desta comunicação, atuantes com tempo de experiência compreendido entre 3 a 28 anos nos Ensinos Secundário e Superior, de quatro escolas da cidade de Mindelo em Cabo Verde, num dos Laboratórios de Informática de um Estabelecimento de Ensino Secundário desta cidade, ministradas pelo autor desta comunicação, orientador particular, nos dias 7, 8 e 9 de julho de 2017, no período vespertino.

Inicialmente foram trabalhadas duas fichas para a familiarização e manipulação das ferramentas do software em apreciação, resgatando o estudo da geometria euclidiana.

Na segunda fase da experiência, referente ao estudo de **Funções de duas variáveis**, foi necessária uma exposição teórica recorrendo ao tradicional quadro-giz com a finalidade de auxiliar os professores a se apropriarem e/ou refrescarem conceitos representação gráfica, domínio e curvas de nível de funções de duas variáveis

Na última fase da experiência, abordou-se o tópico Integral Dupla, com realce ao Teorema de FUBINI, para o estudo do Volume de Sólidos por Integração Iterada, fazendo uso das potencialidades do GeoGebra para a sua representação gráfica e construção de um recurso que possibilita apresentar o sequencial dos episódios da resolução de uma integral dupla, de forma dinâmica, que seja exequível as edições das funções limites da integração e da função integranda.

Durante as sessões, a insuficiência, latente, do método tradicional da régua e do compasso no que tange às representações gráficas de funções mais ousadas, foi suprida pelo Software de Geometria Dinâmica – O GeoGebra.

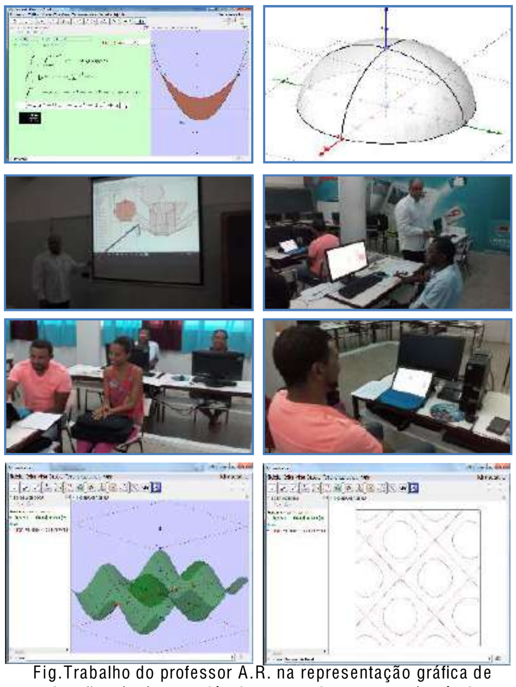


Fig.Trabalho do professor A.R. na representação gráfica de funções de duas variáveis e respetivas curvas de nível

AVALIAÇÃO

Os professores participantes desta experiência foram louvados pelos trabalhos apresentados e interpretações dos resultados que iam auferindo durante as reuniões.

Foram apreciados a comunicação e o comprometimento total dos professores na resolução das tarefas, a particularidade e a solidez das questões manifestadas e o interesse em saná-las durante e antes de abandonarem a sala de reuniões "[...] outro dia é outro tema".

Ao término das tarefas e após ponderação dos resultados, os professores tiravam as sua ilações, atingindo, deste modo, os objetivos apontados.

Os resultados alcançados foram sobejamente positivos e foi unânime a opinião dos participantes em adjetivarem a capacitação de, "inovadora", "proveitosa" e "necessária"

CONCLUSÕES

Foi possível concluir que quando se toma parte das escolhas, e se é estimulado, a desfecho é positivamente evidente. Os professores foram uniformes em certificar que a aplicação do software GeoGebra no ensino da matemática, só traz proveitos na aprendizagem do aluno, além de "coadjuvar", sobremaneira, a tarefa do professor. Esta capacitação aumentou a confiança dos professores participantes em trabalhar com o auxílio do GeoGebra, vencendo a insegurança perante os alunos e mostrou que o uso de uma nova proposta de trabalho em sala de aula faz parte do processo de formação sucessiva

João Manuel Fortes Cruz

joaocruzsv@gmail.com

27 E 28 DE JULHO DE 2017

1º DIA GEOGEBRA NA UNICV

SEMINÁRIO PARA A INSTALAÇÃO DO INSTITUTO GEOGEBRA NA UNICV

www.unicv.edu.cv

Ficha de Trabalho 1 — Explorando o GeoGebra em Geometria e Medida

Tarefa 1 — Explorando o GeoGebra I - Medidas em objetos bidimensionais elementares

1. Abra o software GeoGebra, fazendo um duplo clique no ícone no desktop do teu PC.
2. Com a *ferramenta novo ponto*, , marque 5 pontos não colineares.
3. Utilizando a *ferramenta segmento definido por dois pontos* , , una esses pontos entre si de forma a obter uma figura. Como designa essa figura?

   ____

4. Utilizando a *ferramenta polígono*, , construa outro polígono com o mesmo número de lados.
5. Use a *ferramenta mover* para mover os polígonos obtidos. O que verifica? Registe as suas conclusões.

   ____

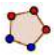
   ____

6. Com a *ferramenta polígono regular*, , construa um quadrado.
7. Utilizando a *ferramenta segmento definido por dois pontos*, , construa as suas diagonais.
8. Com a *ferramenta intersectar*, , determine o ponto de intersecção dessas diagonais.
9. Use a *ferramenta ângulo*, , para medir a amplitude dos ângulos:
   9.1. do quadrado;
   9.2. definidos pelas duas diagonais.
10. Utilizando as *ferramentas de medição*, e , indique as seguintes medidas:
    10.1. Medida de comprimento do Lado = ______________
    10.2. Medida de comprimento do Perímetro = _____________
    10.3. Medida de comprimento da Área = ____________
    10.4. Medida de comprimento das diagonais = ____________
11. Altere a medida do comprimento do lado com a *ferramenta mover* e registe as alterações que observou nas restantes medidas.

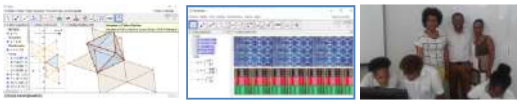
____

____

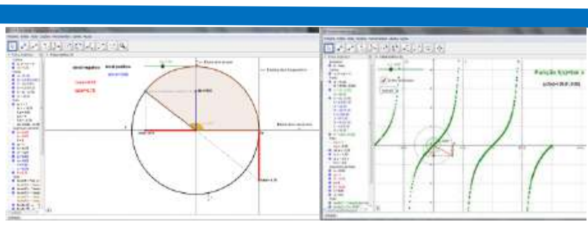
Tarefa 2 — Explorando o GeoGebra II - Medidas em objetos tridimensionais elementares (Prisma Reto)

1. Com a *ferramenta polígono regular*, , construa um quadrado.
2. No menu *Vista* escolha folha gráfica 3D.
3. Clique na *Folha Gráfica 3D* e escolha a *ferramenta extrusão,* .
4. Clique no quadrado e digite a altura.
    4.1. Como designa este sólido? ___________________________________
5. Utilizando a ferramenta  indique:
    5.1. o valor da aresta da base_________;
    5.2. o perímetro da base ____________.
    5.3. Confirme o perímetro da base usando cálculos, nomeadamente usando a *Folha CAS*.
6. Utilizando a ferramenta  indique o valor da área da base ____________.
    6.1. Confirme a área da base usando cálculos, nomeadamente usando a *Folha CAS*.
7. Calcule:
    7.1. A área lateral ______________;
    7.2. A área Total ______________.
8. Utilizando a *ferramenta volume,*  , indique o valor do volume do prisma _______.
9. Confirme com cálculos, nomeadamente usando a *Folha CAS*.

Funções Trigonométricas. Crisolita Sousa de Brito, Dirce Henriques da Luz, João Emanuel Almeida Duarte



Funções Trigonométricas



Tema: **Estudo da Trigonometria**

Tópico: **Transformações do gráfico da função seno**

Capacidades transversais/Competências: **Interpretação do efeito dos parâmetros no gráfico da função seno**

Nível Ensino/Ano: **11º Ano**

OBJETIVOS VISADOS

Desenvolver competências e habilidades para, a partir do gráfico da função *y=sinx*, estudar as transformações ocorridas no gráfico da referida função.

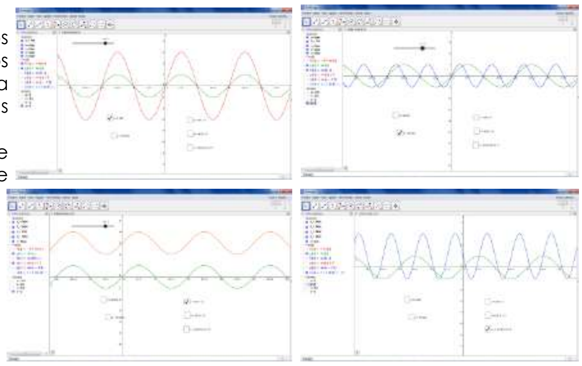
ENQUADRAMENTO CURRICULAR E PROGRAMÁTICO DA ATIVIDADE

Esta atividade *enquadra-se no tema Trigonometria do programa de Matemática do 11º ano de escolaridade, e permite aos alunos compreender e interpretar as transformações gráficas ocorridas no gráfico da função seno. A partir dessas transformações gráficas, o aluno pode generalizar acerca do contradomínio, zeros, paridade e período da função em questão.*

DESCRIÇÃO DAS TAREFAS

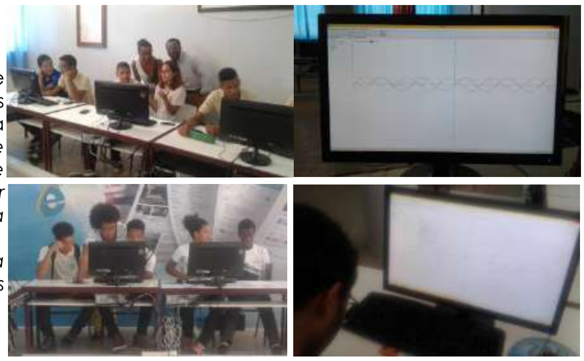
Estas tarefas foram realizadas numa sala de informática, com 18 alunos com breve conhecimento do *software* GeoGebra e orientados pelos autores do trabalho. A partir do estudo da função y= sinx, foi feita a análise das transformações gráficas tendo em conta as funções y=asinx, y=sin(bx), y=sinx+c e y=sin(x-d).

Após a realização das tarefas, fez-se a exploração da aplicação que levou os alunos a uma discussão dos resultados obtidos relativamente aos parâmetros **a**, **b**, **c** e **d**.



AVALIAÇÃO

Durante a realização das tarefas os alunos participaram e interpretaram os resultados que iam deduzindo, atingindo assim os objetivos propostos. Ficou evidenciado que é possível ensinar a Trigonometria de uma forma interativa, recorrendo ao *software* GeoGebra, conforme a opinião dos participantes: *"O software Geogebra é de fácil manuseio e compreensão, permite-nos entender e estabelecer as relações melhores. É um software muito útil para trabalhos. Permitiu diferentes explorações e é de fácil aprendizagem."*
"O GeoGebra é sem duvida um instrumento muito útil para a aprendizagem da matemática, que deverá ser implantado nas escolas e acessível a todos os alunos."



CONCLUSÕES

Os alunos que integraram a experiência mostraram um grande interesse e motivação no estudo do tema, sugerindo que o mesmo seja integrado no ambiente de sala de aula no futuro próximo. Acreditamos ter alcançado os objetivos iniciais do trabalho e, também, ter adquirido habilidades e competências com o software GeoGebra, que nos permite melhorar a nossa pratica docente visando o sucesso da aprendizagem.

Crisolita de Brito — Crisolita.Brito@GOVCV.gov.cv
Dirce Henriques da Luz — dirce.luz@esjb.gov.cv
João Emanuel Duarte — Joao.a.duarte@me.gov.cv

27 E 28 DE JULHO DE 2017
1º DIA GEOGEBRA NA UNICV
SEMINÁRIO PARA A INSTALAÇÃO DO INSTITUTO GEOGEBRA NA UNICV

Ficha de Trabalho — Trigonometria- Estudo da função seno.

Tarefa 1 — Estudo da função seno

1. Digitar a função $f(x) = sin x$
2. Pela observação do gráfico, identifica:
   2.1. Domínio;
   2.2. Contradomínio;
   2.3. Zeros;
   2.4. Máximos e mínimos;
   2.5. Período;
   2.6. Verifica que a função é impar, confirmando com os gráficos.

Tarefa 2 — Transformações dos gráficos da função seno

1. Considere as funções:

$y = a sin x$, onde $a \neq 0$; $y = sin(bx)$, onde $b \neq 0$; $y = sin x + c$; $y = \sin(x - d)$

2. Crie os selectores $a, b, c,$ e d e introduza as funções.
3. Movimente os seletores de modo a obter os gráficos cartesianos das funções:

$$y = \frac{1}{2} sin(x); \quad y = 3 sin(x); \quad y = -2 sin\,(x)$$

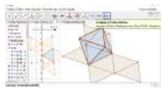
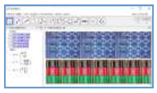
$$y = sin(4x); \quad y = sin\left(\frac{1}{2}x\right); \quad y = sin\,(-2x)$$

$$y = sin x\ + 1; \quad y = sin x + \frac{1}{2}; \quad y = sin x + 2; \quad y = sin x - 2$$

$$y = sin(x - 2); \quad y = sin\left(x + \frac{1}{2}\right); \quad y = sin\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

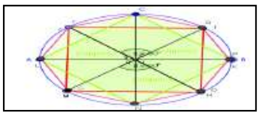
4. Descreva as alterações ocorridas, indicando, sempre que possível, o contradomínio, os zeros, os máximos, mínimos e período de cada uma das funções

GeoGebra no ensino e aprendizagem de posição relativa de retas e planos. Carlos Semedo


GEOGEBRA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE POSIÇÃO RELATIVA DE RETAS E PLANOS

ESCOLA SECUNDÁRIA PEDRO GOMES

Tema: Geometria
Tópico: Posição Relativa de Retas e Planos
Capacidades transversais/Competências: Compreender as Posições Relativas de Retas e Planos
Nível Ensino/Ano: 7º Ano

OBJETIVOS VISADOS

Identificar a importância do uso de GeoGebra no ensino e aprendizagem da posição relativa de retas e planos.

ENQUADRAMENTO CURRICULAR E PROGRAMÁTICO DA TAREFA

Hoje, para ensinar, os professores sentem necessidade de acompanhar os desafios impostos pelas novas demandas sociais. Existem muitos softwares dinâmicos que ajudam no ensino e aprendizagem de Matemática. De entre eles destaca-se o GeoGebra que é um Software gratuito de Matemática dinâmica que reúne recursos da geometria, álgebra, cálculos e estatística. Ele é uma ferramenta que, particularmente possui todas as condições didáticas para o ensino e aprendizagem da posição relativa de retas e planos, enquadrado no tema geometria do programa de Matemática do 7º ano de escolaridade.

DESCRIÇÃO DAS TAREFAS

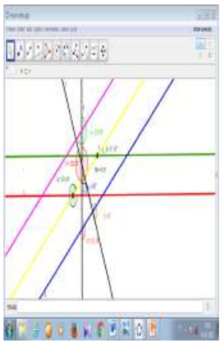
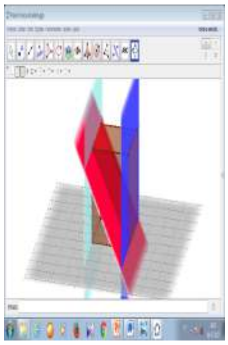
As experiências foram realizadas em duas aulas de 50 minutos cada. Contou-se com a presença de quatro professores de matemática, sob orientação de uma ficha de trabalho, com quatro tarefas.

Nas referidas experiências foi avaliado o uso do GeoGebra, como uma ferramenta didático alternativa, no estudo das posições relativas de retas e planos.

A tarefa 1 consistia em familiarizar os alunos com o GeoGebra ; A tarefa 2 tinha como propósito identificar as posições relativas de retas; A tarefa 3 tinha como objetivo identificar as posições relativas dos planos; A tarefa 4 consistia em identificar as posições relativas de retas e planos a partir de uma figura,.

As Tarefas (1 e 2) foram trabalhadas numa aula de 50 minutos tendo como propósito, estudar as diferentes posições relativas de retas.

As Tarefas (3 e 4) foram trabalhadas numa aula de 50 minutos que consistia em estudar as diferentes posições relativas de planos.

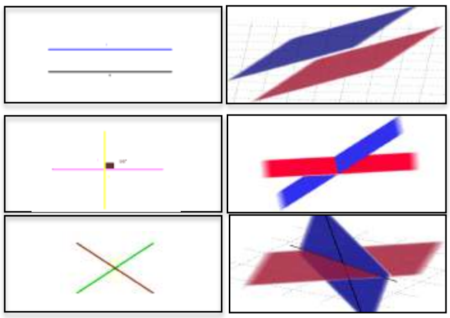



AVALIAÇÃO

Nas tarefas (1 e 2) os alunos tiveram muitas dificuldades, uma vez que afirmaram ser a primeira vez que estavam a ter contato com o GeoGebra.

Nas tarefas (3 e 4) os alunos conseguiram trabalhar sem qualquer problema, uma vez que, já se encontravam familiarizados com o GeoGebra.

Estas realizações foram bem sucedidas, pois foram atingido os objetivos definidos na ficha de trabalho.



CONCLUSÕES

A utilização do Geogebra traz muitas vantagens, sobretudo didática, uma vez que apresenta ao mesmo tempo representações diferentes de um mesmo objeto que interage entre si, permitindo uma aula mais dinâmica e interativa.

Conclui-se que GeoGebra é uma ferramenta muito importante no ensino e aprendizagem da posição relativa de retas e planos e facilita as interacções entre os alunos, originando momentos de partilhas e discussões de raciocínios dos conteúdos em estudos.

Carlos Semedo
carlosmarrt@gmail.com

27 E 28 DE JUlhO DE 2017
1º DIA GEOGEBRA NA UNICV
SEMINÁRIO PARA A INSTALAÇÃO DO INSTITUTO GEOGEBRA NA UNICV

www.unicv.edu.cv

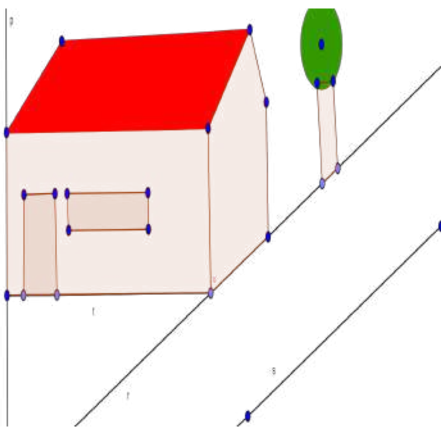
Ficha de trabalhos — Posição relativa de retas e planos

1. Tarefa I - Abrir o software GeoGebra
   1.1. Desenhe uma reta r;
   1.2. Desenhe uma reta s paralela a reta r;
   1.3. Desloque a reta s de modo a coincidir com a recta r.
   1.4. Desenhe uma reta t perpendicular a reta r;
   1.5. Desenhe uma reta h oblíqua a reta r.

2. Tarefa II
   2.1. Construa uma Pirâmide quadrangular.
   2.2. Indique:
      2.2.1. Duas retas paralelas;
      2.2.2. Duas retas perpendiculares;
      2.2.3. Duas retas oblíquas.

3. Tarefa III
   3.1. Desenhe um plano α;
   3.2. Desenhe um plano δ paralelo ao plano α;
   3.3. Desenhe um plano β perpendicular ao plano α;
   3.4. Desloque o plano β de modo a coincidir com o plano α.

4. Tarefa IV
   4.1. Desenhe a figura ao lado com as seguintes condições:
   4.2. A reta r e reta s são paralelas;
   4.3. A reta t e reta r são oblíquas;
   4.4. A retas p e reta t são perpendiculares.



BOM TRABALHO!

Geometria Tridimensional. Reinaldo Fortes Rocha e Sueli pires Rocha

Instituto GeoGebra na Universidade de Cabo Verde

UNIVERSIDADE CABO VERDE

GEOMETRIA TRIDIMENSIONAL

Tema: Geometria Espacial
Tópico: Área e Volume de Sólidos Geométricos
Capacidades transversais/Competências: Relacionar volume geométrico com o analítico
Nível Ensino/Ano: 10º Ano de escolaridade

OBJECTIVOS VISADOS

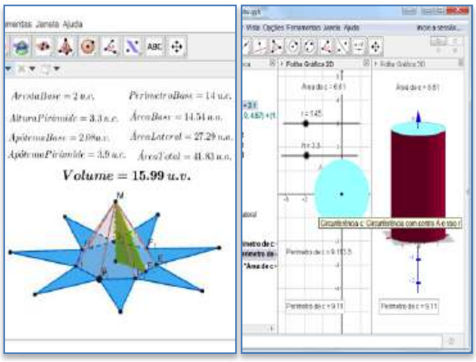
Pretende-se mostrar a potencialidade do Software GeoGebra como mediador no processo de ensino e da aprendizagem da Geometria, quer no que respeita ao desenvolvimento do raciocínio matemático, quer no que concerne à atitude dos alunos perante esta área do saber.

ENQUADRAMENTO CURRICULAR E PROGRAMÁTICO DA TAREFA

Esta tarefa enquadra-se no tema Geometria Espacial, do programa do 10º ano de escolaridade, e permite aos alunos reconhecer a presença de de figuras planas nos sólidos e construir as figuras geométricas a partir de figuras planas.

DESCRIÇÃO DA TAREFA

Desenvolvemos a experiência em 3 (três) aulas com três fichas de trabalho, com a duração de duas horas cada, sendo que todas as tarefas nelas desenvolvidas aos pares decorreram na sala de informática de uma Escola do Ensino Secundário de Cabo Verde. Neste poster vamos realçar o trabalho desenvolvido na **Ficha de trabalho Nº3 – Sólidos com uma base (Pirâmide e Cone Retos).**
Na folha gráfica 2D e com a ferramenta seletor , começamos por criar os seletores "**numlados**" (número de lados do polígono da base) e "**h**" (altura do sólido). Assumimos 2 pontos **A** e **B** e fazendo uso da ferramenta polígono regular construímos um polígono que contém os pontos anteriores e número de lados igual "**numlados**". Na folha gráfica 3D, utilizamos a ferramenta extrusão para pirâmide ou cone e construímos uma pirâmide de altura "**h**". Utilizando a ferramenta de medição, determinamos o comprimento da aresta do polígono da base. O perímetro da base, a área da base, a área lateral, a área total e o volume foram calculados inserindo as respetivas fórmulas na zona de comando, cujos resultados obtidos foram confirmados, pelos alunos, com cálculos. Durante a confirmação dos cálculos apresentaram dúvidas em identificar a apótema do polígono da base, quando este tem número de lado superior ou igual 5 e a apótema da pirâmide, dúvidas estas, que acabaram por ser esclarecidas. Também ficaram vencidos, porém não convencidos, aquando do cálculo da área lateral da pirâmide, o que levou os professores a adiantar uma exposição de planificação de sólidos em GeoGebra, conceito adquirido desde o ensino básico. Por este processo, determinaram a área de um dos triângulos das faces laterais e multiplicaram-na pelo "**numlados**".



AVALIAÇÃO

Os alunos foram avaliados ao longo da experiência, pelas intervenções e respostas dadas.
Durante a construção da aplicação os alunos participaram e interpretaram os resultados que iam obtendo.
No final da tarefa e após uma discussão e reflexão de resultados, os alunos chegaram às conclusões atingindo assim os objetivos propostos.

CONCLUSÕES

Os resultados obtidos no questionário final apontaram que os alunos qualificaram a atividade como "interessante", "proveitosa", "diferente" e até como um aluno referiu: "É engraçado, no fundo acabamos por brincar com a Matemática. É uma forma mais divertida de aprender." De facto, o uso das novas tecnologias poderá trazer significativas contribuições para se repensar o processo de ensino à medida que auxiliam na construção do conhecimento. Nesse sentido, o GeoGebra apresenta inúmeras capacidades funcionais, que poderão ser reconhecidas e aproveitadas por professores e alunos para obter resultados eficientes no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Ficou evidente durante a aula o interesse e a disposição dos alunos no estudo e utilização do software GeoGebra como ferramenta no quotidiano escolar.

Reinaldo Fortes Rocha
reinaldorocha79@hotmail.com

Sueli Cilene Pires Rocha
suelycilene65@gmail.com

27 E 28 DE JULHO DE 2017
1º DIA GEOGEBRA NA UNICV
SEMINÁRIO PARA A INSTALAÇÃO DO INSTITUTO GEOGEBRA NA UNICV

www.unicv.edu.cv

Fichas de Trabalho 1 - Explorando o GeoGebra I

1. Clique com o botão direito do rato na *zona gráfica*, seleciona a vista *quadriculado* e com a *ferramenta novo ponto* marca 3 pontos não colineares.
2. Utilizando a *ferramenta segmento definido por dois pontos* una esses pontos entre si de forma a obteres uma figura.
3. Como se designa essa figura?

____

4. Utilizando a *ferramenta polígono*, , construa outro polígono com o mesmo número de lados.
5. Use a *ferramenta mover* para mover os polígonos obtidos. O que verifica? Registe as conclusões a que chegou.

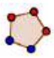
____

6. Com a *ferramenta polígono regular,* , construa um quadrado.
7. Utilizando a *ferramenta segmento definido por dois pontos*, , construa as suas diagonais.
8. Com a *ferramenta intersectar*, , determine o ponto de intersecção dessas diagonais.
9. Use a *ferramenta ângulo*, , para medir a amplitude dos ângulos:
   9.3. do quadrado;
   9.4. definidos pelas duas diagonais.
10. Utilizando as ferramentas de medição e , indique as seguintes medidas:
    10.1. Medida de comprimento do Lado = _______________
    10.2. Medida de comprimento de Perímetro = ______________
    10.3. Medida de comprimento de Área = _____________
    10.4. Medida de comprimento das diagonais = _____________
11. Altere a medida do comprimento do lado com a *ferramenta mover,* , e registe as alterações que observaste nas restantes medidas.

____

12. Complete, usando as palavras “as diagonais”, “os ângulos”, “os lados”:
    12.1. “Um quadrado possui _____________ e _____________ iguais”.
    12.2. “Num quadrado ______________ são perpendiculares e de igual comprimento”.

Fichas de Trabalho 2 - Explorando o GeoGebra II — Prismas

1. Com a *ferramenta polígono regular*, , desenhe um quadrado.

2. No menu *Vista* escolh *Folha Gráfica 3D*.

3. Clique na *Folha Gráfica 3D* e escolha a *ferramenta extrusão,* , (para pirâmide ou cone).
    3.1. Clique no quadrado e digite a altura.
    3.2. Como se designa este sólido? ___________________________________

4. Utilizando a ferramenta 

indica:
    4.1. o valor da aresta da base____________;
    4.2. o perímetro da base _______________.

5. Confirme o perímetro da base com cálculos.

6. Utilizando a ferramenta 

indique o valor da área da base ______________.

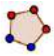
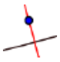
7. Confirme a área da base com cálculos.

8. Calcule:
    8.1. A área lateral ______________.
    8.2. A área Total ______________.

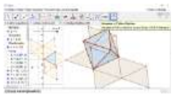
9. Utilizando a ferramenta 

indique o valor do volume do prisma ____________.
    9.1. Confirme com cálculos.

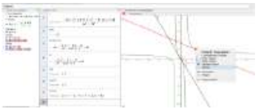
Ficha de Trabalho 3 - Explorando o GeoGebra III — Pirâmide

1. Com a *ferramenta polígono regular*, , desenhe um Pentágono.
2. Com a ferramenta  determine o seu perímetro _______________.
   2.1. Confirme com cálculos.
3. Com a *ferramenta circunferência três pontos*, , construa a circunferência circunscrita ao polígono.
4. Com a *ferramenta ponto médio ou centro,*  , determine o centro do pentágono.
5. Utilize a ferramenta  para para determinar a reta que passa por este ponto, perpendicular a um dos lados do pentágono.
6. Usa a ferramenta  para determinar o ponto de interseção entre o lado e a reta referidos na alínea anterior.
7. Usa a ferramenta  para unir o centro do polígono e o ponto encontrado em 4.
8. Que nome dá a este segmento? ___________________________________
9. No menu *Vista* escolha *Folha Gráfica 3D*, .
   9.1. Clique na *Folha Gráfica 3D* e escolha a ferramenta  .
   9.2. Clique no pentágono e digite a altura.
   9.3. Como se designa este sólido? _________________________________
10. Utilizando a ferramenta  indique:
   10.1. o valor da aresta da base_____________,
   10.2. o perímetro da base _____________,
   10.3. confirme o perímetro da base com cálculos.
11. Utilizando a ferramenta  indique:
   11.1. o valor da área da base ______________.
   11.2. confirme a área da base com cálculos.
12. Calcula e confirme os resultados com cálculos:
   12.1. a área lateral __________________.
   12.2. a área Total __________________
13. Utilizando a ferramenta  indique:
   13.1. o valor do volume deste sólido _______________.
   13.2. Confirme com cálculos.

Interpretação Geométrica da derivada. Roscelino Eduardo Borges dos Santos



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA




Tema: Funções reais de variável real
Tópico: Derivadas
Capacidades transversais/Competências: Interpretação gráfica de uma função
Nível Ensino/Ano: 12.º ano de escolaridade

OBJETIVOS VISADOS

Implementação de uma nova abordagem, nomeadamente o uso da tecnologia no ensino da Matemática, em especial o GeoGebra, visando a compreensão de conceitos matemáticos, de uma forma prática e dinâmica. O principal objetivo foi usar a interpretação geométrica da derivada de uma função, com recurso a este software, para tirar conclusões no estudo da monotonia, existência de extremos relativos e estudo do sentido das concavidades do respetivo gráfico.

ENQUADRAMENTO CURRICULAR E PROGRAMÁTICO DA TAREFA

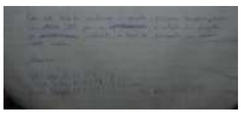
Esta tarefa está enquadrada no tema Funções Reais de Variável Real, do programa de Matemática do 12.º ano de escolaridade e facilita a compreensão e interpretação do significado geométrico da derivada, levando o aluno a entender a importância da derivada no estudo analítico de uma função. Permite estabelecer a conexão entre a descrição do gráfico de uma função e o conceito da derivada, num ponto ou num intervalo. A existência de pontos críticos, nulidade da derivada, associada à mudança de sinal com apoio da visualização gráfica promove bons esclarecimentos no estudo analítico da monotonia, extremos, concavidades e pontos de inflexão, orientando o estudante nas suas conclusões. Através de experimentação, o posicionamento de retas tangentes ao gráfico da função e observação de seus respetivos declives, aliado ao conceito da derivada, fornece informações importantes no reconhecimento da relação existente entre a interpretação geométrica da derivada e o estudo gráfico de uma função.

DESCRIÇÃO DA TAREFA

Antes de dar início à atividade foi necessário preparar os alunos com duas aulas de apoio onde ficaram a conhecer os principais comandos do GeoGebra de que iriam precisar na resolução da mesma. A tarefa foi realizada no computador, tendo sido distribuída aos alunos que formaram grupos de trabalho constituídos por dois a três elementos, sob a orientação do professor. Incidia essencialmente sobre a aplicação da derivada no estudo e interpretação gráfica de de três funções.
Os grupos trabalharam de forma autónoma, conseguindo introduzir os dados, recolher as informações fornecidas pelo programa, interpretando-as e resumindo as principais conclusões num relatório elaborado durante a execução da tarefa.
Esta atividade promoveu muita cooperação e colaboração entre elementos do mesmo grupo, através da interajuda, permitindo maior dinamismo no grupo e melhor interação entre cada grupo e o computador e entre os grupos e o professor.
Permitiu também que os alunos fizessem uma reflexão destacando a utilidade e as potencialidades deste recurso na compreensão destes e outros conceitos estudados na disciplina de Matemática.


AVALIAÇÃO

Esta tarefa teve caráter avaliativo formativo, tendo os alunos sido avaliados, com classificações quantitativas, na escala de 0 a 20 valores, conforme a coerência entre as conclusões constantes do relatório e o trabalho feito no GeoGebra, tendo em consideração a comprensão ou não dos conteúdos lecionados, a criatividade e organização.
A avaliação foi feita aos grupos de trabalho em dois momentos: durante e pós execução da tarefa. Deste modo, incentivou os alunos a trabalharem com mais afinco, aprimorando na criatividade. Verificou-se maior disponibilidade e interesse neste trabalho, comparativamente a outros já feitos.
Salienta-se, por um lado, ede um modo geral, a melhoria dos resultados classificatórios em relação a outras avaliações, por outro, melhor compreensão da matéria dada.



CONCLUSÕES

As apreciações feitas pelos estudantes, relativas ao uso do software GeoGebra, na produção desta atividade, apontaram que o software foi “útil”, “espetacular” e um grupo sugeriu a realização de testes de avaliação somente no GeoGebra. Com este trabalho ficou patente a utiliade deste “grande” recurso no processo de ensino e de aprendizagem da matemática, bem como de outras disciplinas afins. No entanto, nem sempre foi fácil a sua preparação/elaboração. Exigiu muita planificação da parte do professor, empenhamento e dedicação de modo a conseguir criar formas dinâmicas de trabalhar com os seus alunos. Os ganhos obtidos foram compensatórios, na medida em que se observa maior interesse da parte dos alunos para a disciplina e consequentemente melhor aproveitamento. Este trabalho é um exemplo do que se pode obter com uso das tecnologias ao serviço do ensino, em particular o GeoGebra.

Roscelino Eduardo Borges Dos Santos.

27 E 28 DE JULHO DE 2017
1º DIA GEOGEBRA NA UNICV
SEMINÁRIO PARA A INSTALAÇÃO DO INSTITUTO GEOGEBRA NA UNICV

Ficha de Trabalho — Interpretação geométrica da derivada

A seguinte sequência de tarefas foi apresentada aos alunos e integrou um momento de avaliação dos estudantes.

1. Abra o programa GeoGebra e introduza as funções definidas por:

   1.1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$;

   1.2. $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$;

   1.3. $h(x) = x^3 - 3x$

2. Obtenha a representação gráfica de cada uma das funções.

3. Determine as assíntotas dos respetivos gráficos1.

4. Com recurso à função derivada, determine, para cada função:

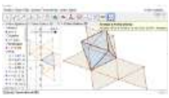
   4.1. Se existirem, os extremos relativos;

   4.2. Os intervalos de monotonia;

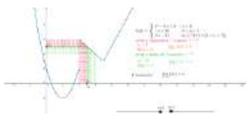
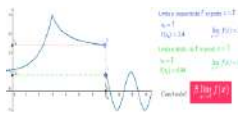
   4.3. Os pontos de inflexão e o sentido das concavidades do gráfico.

5. Com base nos resultados obtidos, elabore um mini-relatório, indicando as principais conclusões do seu estudo.

Limite de uma função num ponto. Arlindo da Veiga, Leila Veiga, Salvador Semedo



LIMITE DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

Tema: Interpretação geométrica de limite de uma f.r.v.r. num ponto de acumulação
Tópico: Limites Laterais
Capacidades transversais/Competências: Compreender o conceito de limite
Nível Ensino/Ano: 12º ano/ Análise Matematica I

OBJECTIVOS VISADOS

Com este trabalho, pretendemos produzir um aplicativo, com o fim de auxiliar o professor na construção do conceito de limite de uma função real de variável real (f.r.v.r.) num ponto de acumulação, no processo de interação pedagógica.

ENQUADRAMENTO CURRICULAR E PROGRAMÁTICO DA TAREFA

O estudo de Limite de funções faz parte de conteúdos programáticos do currículo escolar cabo-verdiano, do ensino secundário ao superior, mais concretamente nas unidades curriculares de Matemática e com aplicações em outras áreas. Ainda no contesto específico das unidades curriculares matemáticas, o estudo de limites de funções se reveste de grande importância para o estudo da continuidade de uma função num ponto, cálculo de derivadas, entre outras. O programa de 12ºano do ensino secundário (Filipe, 2004, p. 22) recomenda que:

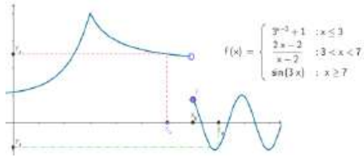
1. o aluno averigue a existência de limite, ou de limites laterais de uma função, quando x tende para um ponto recorrendo às definições, às regras operatórias e em casos de indeterminação. Devem considerar-se caso em que a função é definida por ramos.
2. a partir da analise de gráfico de funções, o aluno deve verificar que a igualdade de limites laterais permite concluir a existência de limite.

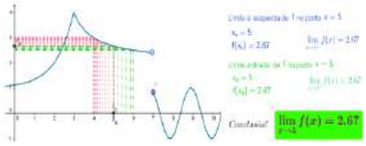
O aplicativo em questão, permite que o aluno tenha uma visualização da tendência/aproximação da imagem, em função da aproximação do objeto ao valor da abcissa do ponto onde se deseja analisar o limite de uma função. Essas aproximações são exploradas tanto à direita como à esquerda do referido valor e, com isso, concluir sobre existência de limite da função no ponto considerado.

DESCRIÇÃO DA TAREFA

O processo do desenvolvimento deste aplicativo tem como tem a considerar os seguintes aspetos:

- No primeiro momento, ocupamos de definir que tipo de função seria mais fácil prevermos/controlarmos os seus comportamentos a ponto de as apresentações geométricas das variações dos seus valores de interesse não atrapalharem as nossas apresentações e nem nos induzir a erros, matematicamente inaceitáveis para a construção do conceito de limite.
- O utilizador que leva o aplicativo para o contexto da sala de aula, edita a expressão da função $f(x)$ que aparece na janela de algébrica, sem apagá-la, para obter o gráfico na vista correspondente em $2D$. De seguida, estabelece o ponto de acumulação (x_0) de interesse que será o centro de uma vizinhança de raio 1 . Este valor será introduzido, através do parâmetro seletor p, no campo de entrada .
- Os valores de x_e e de x_d são controlados pelos seletores, visualizando, assim o x a tender para x_0 com valores à direita ou à esquerda de x_0 , conforme deslocamentos dos seletores
- Algumas informações aparecem automaticamente nas janelas $\mathbf{2D}$ e $\mathbf{2D2}$ mediante condições determinadas:
  - Os valores de x_e e x_d e respetivas imagens y_e e y_d, em função da movimentação dos seletores;
  - Os respetivos limites laterais;
  - O valor do limite de f no pontox_0, quando os limites laterais são iguais, ou a informação de que não existe limite nesse ponto, quando os limites laterais são deferentes.

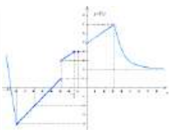




AVALIAÇÃO

Com o intuito de avaliar o nosso aplicativo testámo-lo numa aula de análise matemática. Depois desta apresentação, propomos, aos alunos, uma tarefa relacionada com a análise de limite de uma função definida graficamente, e notamos, pelas suas reações e testemunhos prestados, que o conceito de limite ficou melhor interiorizado. Pois, esta mesma tarefa tinha sido apresentada antes do uso do aplicativo em que os alunos tinham mostrado muitas dificuldades na sua resolução, pelo que supomos, e confirmaram, que o uso deste aplicativo tenha dado um valioso contributo.

Observar a *f.r.v.r.*, f , definida pelo gráfico ao lado e indicar, caso exista:
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-8^-} f(x)$, $\lim_{x\to-8^+} f(x)$, $\lim_{x\to-6} f(x)$,
$\lim_{x\to-3^-} f(x)$, $\lim_{x\to-3} f(x)$, $f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$
$\lim_{x\to-\frac{3}{2}}$, $\lim_{x\to 3} f(x)$, $\lim_{x\to 3} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$



CONCLUSÕES

O desenvolvimento desta tarefa, além de permitir produzir um aplicativo que visa facilitar a trabalho do professor na mediação da construção do conceito de limites por parte dos alunos, permitiu, ainda, conhecer melhor o *software* matemático *GeoGebra*. Apesar de não ser um trabalho tipicamente empírico, a oportunidade/curiosidade de experimentação no contexto da sala de aula possibilitou concluir, conforme as opiniões de uma professora observadora e do próprio experimentador, professor da turma, bem como dos alunos, que foi mais fácil perceber as aproximações dos objetos ao ponto de acumulação e as aproximações das suas imagens aos valores dos limites laterais, que antes estava a gerar alguma confusão/perturbação na aprendizagem do conceito/noção intuitiva de limites.

BBLIOGRAFIA

Filipe, L. (2004). Programa da disciplina de Matemática, 3º ciclo - 11º e 12º Anos. Praia - Cabo Verde: Ministério da Educação Ciência e Cultura.

Swokowski, E. (1979). Calculus With Analitic Geometry, Second Edition. Boston, Prindle, Wber & Schmidt

Lima J, CarameloF. Couceiro, J. Reis, R e Veiga, F, (2005). Biomatemática - Uma introdução para o curso de Medicina. Coimbra, Universidade de Coimbra.

Ficha de Trabalho - Interpretação geométrica de limite de uma função real de variável real num ponto de acumulação

A intuição e a visualização geométrica, costumam ser aliados importantes ao processo de aprendizagem e construção racional de conceitos sobre limites. Por isso temos em construção de uma aplicação de GeoGebra que visa auxiliar essas faculdades para aprendizagem de conteúdos sobre limites. A exploração da aplicação teve por base três atividades que implicou a realização de várias tarefas pelos alunos.

Atividade 1 – Apresentação do aplicação de GeoGebra

Tarefa 1 – Apresentação do aplicativo pelo professor e algumas orientações de como funciona: referência aos parâmetros fundamentais ($y,\ p,\ x_0,\ \varepsilon,\ d$)
Tarefa 2 — Introdução de uma função definida por ramos na aplicação de GeoGebra com participação dos alunos e visualização do respetivo gráfico, considerando a função

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & \text{se} \quad x \leq 4 \\ \frac{2x-3}{x-3} - 3 & \text{se} \quad 4 < x \leq 9 \\ 3 & \text{se} \quad x = 10 \end{cases}$$

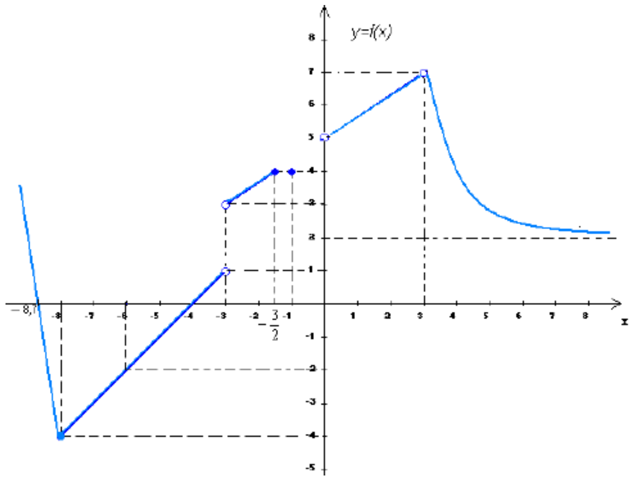
Tarefa 3 – Análise gráfica de limite da função em alguns pontos de acumulação do domínio (Perguntas com respostas a serem dadas no caderno, sob orientação do professor da turma, com assistência da professora observadora).

Perguntas relativas aos pontos de acumulação escolhidos

1. Qual é o limite lateral esquerdo da função f no ponto de abcissa $x = 4$?
2. Determine o limite lateral direito da função no mesmo ponto.
3. Que conclusão se chega quanto à existência de limite da função f neste ponto? Fundamente a resposta.
4. Faça comentários sobre existência de limite em cada uma das alíneas sobre:
   4.1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
   4.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
   4.3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Atividade 2 – Desenvolvimento de tarefas complementares

Tarefa 4: Considere a função real de variável real, f, definida pelo gráfico ao lado e indique, caso exista: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$;



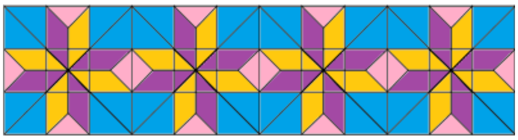
1. $\lim\limits_{x \to -8^-} f(x)$;
2. $\lim\limits_{x \to -8^+} f(x)$;
3. $\lim\limits_{x \to -6} f(x)$;
4. $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$;
5. $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$;
6. $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$;
7. $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}} f(x)$;

Atividade 3 – Avaliação

1. Considerando o gráfico da Tarefa 4, determine os pontos de acumulação do domínio da função.
2. Quando é que uma função tem limite num ponto de acumulação do seu domínio?
3. Como compara a sua aprendizagem na aula de hoje com a da aula passada sobre conceito de limite de uma função num ponto?
4. Que apreciação faz do uso deste aplicativo na clarificação de suas noções de limites trazidas até a aula de hoje?
5. Consegue deixar algumas sugestões de melhoria para esta aplicação de GeoGebra, a fim de melhor facilitar a compreensão do conhecimento para o qual está sendo criado?

O GeoGebra como Ferramenta de Apoio para a Aprendizagem Significativa da Matemática. Astrigilda Rocha Pires Silveira

O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE APOIO PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA MATEMÁTICA



Tema: Geometria
Tópico: Isometrias no Plano euclidiano
Capacidades transversais/Competências: Desenvolvimento do raciocínio, comunicação e resolução de problemas.
Nível Ensino/Ano: Básico/8º ano

OBJECTIVOS VISADOS

Avaliar o impacto, em professores e respetivos alunos, de um Programa de Formação Contínua centrado na abordagem do tópico Transformações Geométricas Isométricas no plano euclidiano apoiada pela exploração de ADGD (GeoGebra), no desenvolvimento de competências geométricas (professores e alunos), curriculares e didáticas (professores) e tecnológicas (professores e alunos).

ENQUADRAMENTO CURRICULAR E PROGRAMÁTICO DA TAREFA

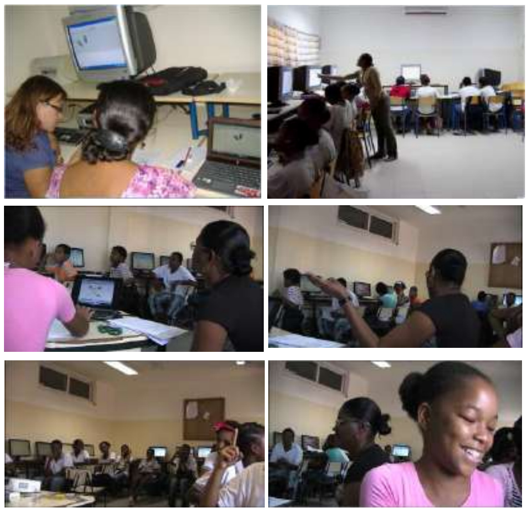
O estudo das Isometrias no plano euclidiano enquadra-se no Tema de Geometria do 8º ano do Ensino Básico.

DESCRIÇÃO DA TAREFA

Na experiência em sala de aula foram feitas 6 sessões por semana, durante sete semanas, num total de 43h, com 15 planos de aula, desenvolvidos com a Professora-caso, e onde se incluem: os objetivos específicos, os conteúdos, a estratégia, os recursos/materiais, a avaliação e o tempo previsto. Recorde-se que, nas sessões de formação, foram desenvolvidas tarefas para a sala de aula, tanto pela Formadora como pelos formandos, tendo as sessões de trabalho colaborativo com a professora servido para as adequar aos seus alunos.

As fichas de trabalho foram desenvolvidas com base em diversos tipos de tarefas: exercícios, problemas e explorações, com maior ênfase nas tarefas de natureza exploratória. Adotou-se a estruturação das fichas de trabalho de modo a possibilitarem ao aluno o registo das propriedades descobertas e das conclusões tiradas. Foi possível desenvolver 9 fichas de forma individual e 5 em pares. Atendendo ao número ímpar de alunos pertencentes à turma, um grupo era constituído por 3 elementos; sendo a ficha 12 desenvolvida em grupos de três. Antes da realização da primeira Ficha, foi distribuído aos alunos um 'Guia das Ferramentas do GeoGebra'.

Para o desenvolvimento das aulas, foi adotada a estratégia de ensino e de aprendizagem exploratória, tendo sido reservado um espaço para realização de trabalho autónomo por parte do aluno. Os conceitos em estudo foram desenvolvidos com base no trabalho prático dos alunos.



AVALIAÇÃO

Na avaliação das aprendizagens dos alunos, foram tidos em conta os critérios estipulados no Regulamento para Avaliação, da responsabilidade do Ministério de Educação para o Ensino Secundário. Nele é definido que esta " […] deve incidir sobre os conhecimentos, as capacidades e as competências do aluno face ao plano curricular de cada disciplina" (artigo 3º).

Além dos testes de avaliação, nesta experiência foram considerados a participação e o empenho dos alunos na realização das tarefas em sala de aula, a qualidade e a pertinência das dúvidas formuladas por eles e a exposição público de trabalhos sobre os tópicos estudados.

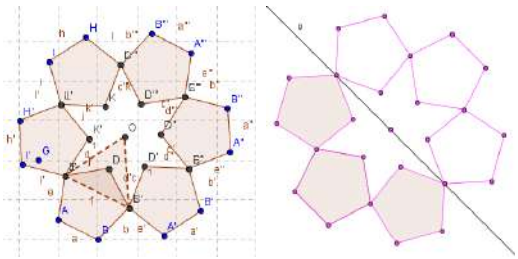


Fig. Resposta do aluno A10 à questão 2 do pré e pós teste prático

CONCLUSÕES

A experiência desenvolvida em sala de aula teve repercussões muito positivas ao nível da motivação e empenho dos alunos, bem como da construção de conhecimento sobre os tópicos geométricos abordados e do desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas, de comunicação e de raciocínio. Permitiu, ainda, o desenvolvimento de uma visão mais abrangente, correta e positiva das ferramentas informáticas na aprendizagem da matemática.

Astrigilda Pires Rocha Silveira
astrigilda.silveira@docente.unicv.edu.cv

27 E 28 DE JULHO DE 2017
1º DIA GEOGEBRA NA UNICV
SEMINÁRIO PARA A INSTALAÇÃO DO INSTITUTO GEOGEBRA NA UNICV

Ficha de Trabalho - Isometrias do plano euclidiano

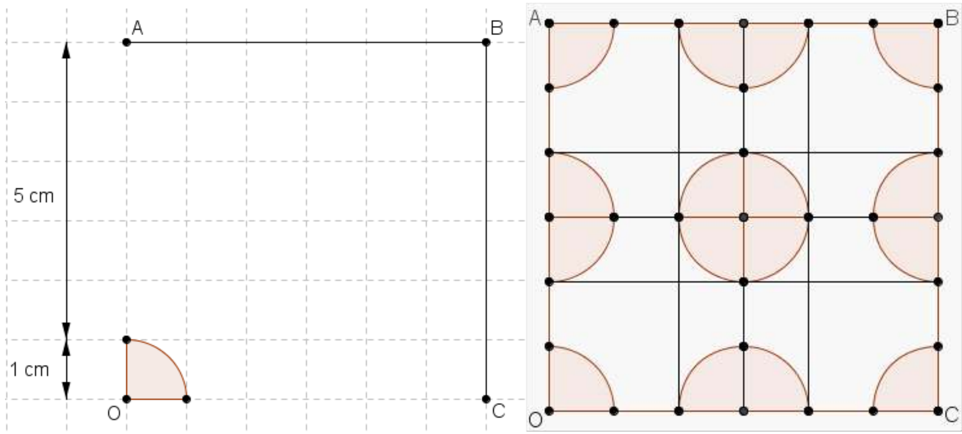
Os itens que a seguir se apresentam integraram um instrumento de avaliação de grupos de alunos em escolas de Cabo Verde. Durante a realização das tarefas os alunos utilizaram o GeoGebra. Para mais detalhes se sugere a leitura do poster e do artigo que lhe está relacionado.

Tarefa 1 - Construa, no GeoGebra, um triângulo [ABC] à sua escolha.

1. Determine o transformado do triângulo [ABC] pela:
   - 1.1. Translação associada ao vetor $\overrightarrow{AC}$ e pinte-o de verde;
   - 1.2. Rotação de centro A e medida de amplitude 160º no sentido anti-horário e pinte-o de azul;
   - 1.3. Reflexão associada a um eixo qualquer e pinte-o de vermelho;
   - 1.4. Reflexão deslizante associada a um eixo e vetor construídos à sua escolha e pinte-o de rosa.
2. Os triângulos (o objeto com cada uma das imagens) são congruentes? Justifique a sua resposta.

Tarefa 2 - Padrão a partir de uma quadrado.

Construa, no GeoGebra, a figura abaixo, à esquerda, com as medidas de comprimento indicadas. Os pontos O, A, B e C formam um quadrado[1].



A partir da figura acima e à esquerda, usando isometrias, construa a figura acima e à direita.

[1] Adaptado de: APM (2007). *Matemática para professores. Transformações Geométricas e Simetrias*. Escola Superior de Educação de Lisboa, Portugal.

Tarefa 3 - Padrões com simetrias de reflexão [2].

Desenhe, no GeoGebra, uma figura à sua escolha com:

0 eixos de simetria;

Só com 1 eixo de simetria;

Só com 1 eixo de simetria e com mais de três lados;

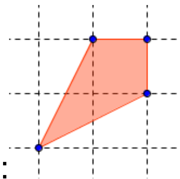
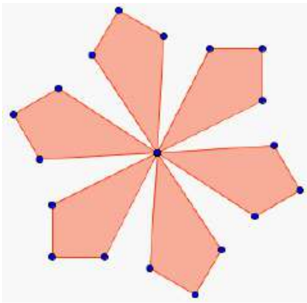
Só com 2 eixos de simetria e que não seja um retângulo;

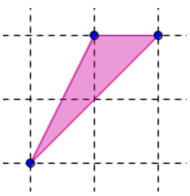
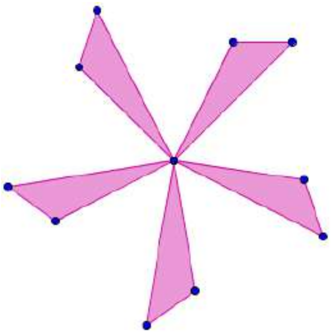
Só com 3 eixos de simetria;

Só com 5 eixos de simetria.

Tarefa 4 - Padrões com simetrias cíclicas ou diedrais.

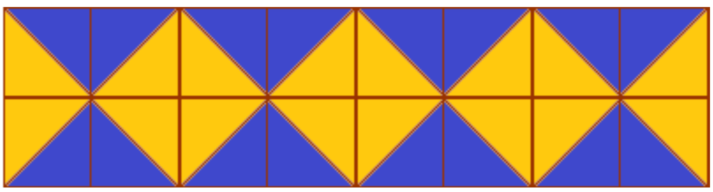
A partir dos motivos dados e recorrendo a isometrias que achar adequadas, construa as rosáceas ilustradas abaixo. Classifica-as em grupos cíclicos ou diedrais. Justificque essa classificação.

1. Motivo:  Rosácea: 

2. Motivo:  Rosácea: 

Tarefa 4 - Frisos

1. Insira na *zona gráfica* do GeoGebra o ficheiro módulo.png que se encontra no ambiente de trabalho do computador. Construa no GeoGebra, o friso seguinte, partindo do módulo dado.

Módulo:  Friso: 

[2] Fonte: DGIDC (2009). *Proposta de cadeia de tarefas para o 8º ano – 3º Ciclo". Isometrias*. Novo Programa de Matemática do Ensino Básico.

2. A Lavínia frequenta o 8º ano do Ensino Secundário e gosta de Geometria. Como o pai é tecelão e faz “Panos de Terra”, ela também começou a tecer, aplicando as isometrias que estudou. No dia da Matemática, expôs um dos seus trabalhos (Figura A) realizado numa aula de Geometria.

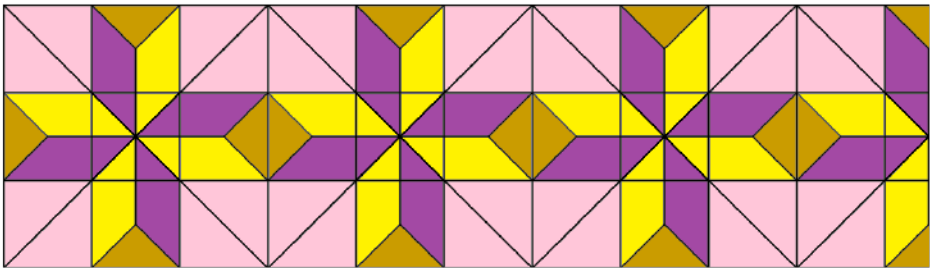


Figura A - Pano de Terra

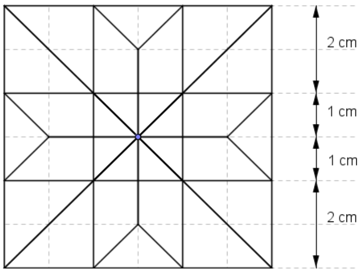


Figura B

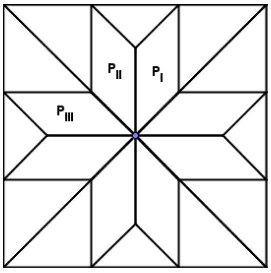


Figura C

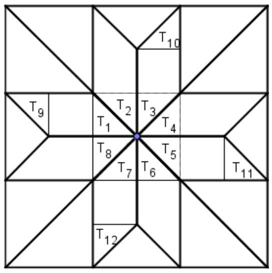


Figura D

2.1. Com o auxílio do GeoGebra, reproduza a Figura B utilizando isometrias. Copie-o para o paint, pinte-o como preferir e guarde-o no ambiente de trabalho do computador com o nome FiguraB.png.

2.2. Considere a Figura C e identifique:

2.2.1. A isometria que transforma o paralelogramo I (PI) no paralelogramo II (PII);

2.2.2. A isometria que transforma o paralelogramo I (PI) no paralelogramo III (PIII);

2.3. Considere a Figura D e identifique:

2.3.1. Dois triângulos congruentes. Justifica a tua resposta.

2.3.2. Um par de triângulos em que um possa ser obtido a partir do outro, através de uma:

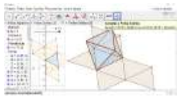
2.3.2.1. Translação

2.3.2.2. Reflexão

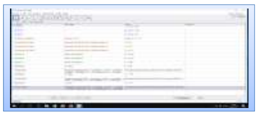
2.3.2.3. Rotação

2.4. Abra o ficheiro FiguraB.png que se encontra no ambiente de trabalho do computador e, dando largas à sua criatividade, construa um Pano de Terra no GeoGebra.

Os Triângulos e as suas Leis. Lucileida Ramos, Nelson Urbano, Paula Neves



Os Triângulos e as suas Leis

Tema: Resolução de Triângulos Quaisquer
Tópico: A Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos
Capacidades transversais/Competências: Relacões métricas entre os lados e ângulos de um triângulo
Nível Ensino/Ano: 11º

OBJECTIVOS VISADOS

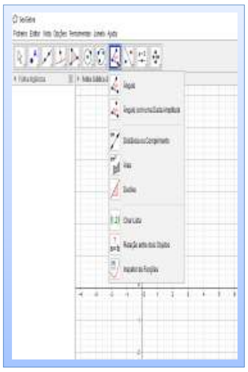
Levar os alunos a formalizar a lei dos senos e a lei dos cossenos antes de serem enunciadas, através de atividades previamente delineadas, desenvolvidas em um ambiente informatizado e dinâmico.

ENQUADRAMENTO CURRICULAR E PROGRAMÁTICO DA TAREFA

A tarefa enquadra-se no tema Trigonometria, em particular Resolução de Triângulos Quaisquer, do programa de Matemática do 11º ano de escolaridade e visa levar os alunos a compreenderem as relações existentes entre os lados e os ângulos de um triângulo qualquer.

DESCRIÇÃO DA TAREFA

Na primeira sessão foi dado aos alunos duas horas de familiarização com o GeoGebra. Na segunda sessão (com duração de três horas) foram distribuidas as fichas de atividades aos alunos, tendo estas servido de guião para a realização das tarefas. No final de cada ficha de atividade foi pedido aos alunos, para de forma individual, formarem uma frase que exprimisse as relações observadas.

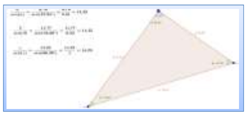


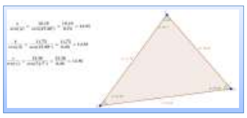
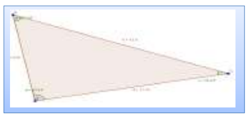
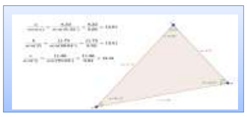
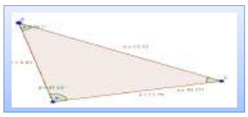

AVALIAÇÃO

Inicialmente na fase de familiarização alguns alunos demonstraram dificuldades no uso das ferramentas do GeoGebra, que foram rapidamente ultrapassadas passando posteriormente a interagir com o *Software* de forma intuitiva.

Os alunos foram avaliados pelas respostas dadas. Todos foram bem sucedidos ao reconhecer que as razões entre as medidas de cada lado e o seno do respetivo ângulo oposto são iguais. Dos 7 alunos avaliados, 3 conseguiram por palavras próprias, formular uma frase que exprime a lei dos senos.

No final das atividades todos os alunos de forma anónima, responderam sobre o grau de preferência quantificado numa escala de 1 a 5, em relação a metodologia de ensino da matemática com recurso ao GeoGebra, tendo 6 alunos indicado o nível de preferência 5 e 1 aluno indicado o nível de preferência 4.



CONCLUSÕES

Após apenas duas horas de familiarização os alunos conseguiram executar as tarefas propostas, o que demonstra um impacto positivo do uso do GeoGebra como ferramenta de apoio ao ensino e aprendizagem da matemática.

É notória a motivação dos estudantes perante a possibilidade de participar na construção do próprio conhecimento. Pode-se concluir que é possível, recorrendo ao GeoGebra, induzir os alunos a formalizar conceitos matemáticos e promover uma aprendizagem significativa.

Autores ou implementadores da tarefa:
Lucileida Ramos (lucileida.regina@docente.unicv.edu.cv), Nelson Urbano (nelson.urbano@docente.unicv.edu.cv) e Paula Neves (paula.neves@docente.unicv.edu.cv)

27 E 28 DE Julho DE 2017
1º DIA GEOGEBRA NA UNICV
SEMINÁRIO PARA A INSTALAÇÃO DO INSTITUTO GEOGEBRA NA UNICV

Ficha de Trabalho - Aplicação da lei dos senos

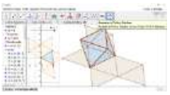
1. Clica com o botão direito do rato na *zona gráfica*. Clique com o botão esquerdo em eixos, , para retirar os eixos.
2. Clique com o botão direito do rato na *zona gráfica*. Clique com o botão esquerdo em grelha, , para retirar a *vista quadriculado*.
3. Com a *ferramenta polígono*, , construa um triângulo.
4. Selecione a *ferramenta ângulo*, , e clique com o botão esquerdo do rato no interior do triângulo para medir a amplitude dos seus ângulos internos.
5. Selecione a *ferramenta distância*, , e clique sobre cada um dos lados para obter a respetiva medida.
6. Na linha de comandos, calcule o quociente entre a medida de cada um dos lados e o respetivo seno do ângulo oposto

$$\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{seno}(\alpha)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}; \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{seno}(\beta)} = \frac{b}{\sin(b)}; \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{seno}(\gamma)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}\right).$$

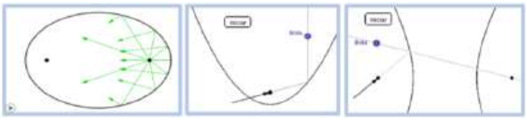
Compare os resultados obtidos e regista.

7. Selecione a *ferramenta mover,* . Clique num dos vértices do triângulo e arraste-o para alterar as medidas do triângulo. Compare os resultados obtidos e registe.
8. Repita o exercício 7. Fazendo comparação com os registos anteriores o que consegue concluir?
9. Formule uma frase que traduza o observado nos exercícios 6, 7 e 8, fazendo uso da expressões “lado” e “respetivo ângulo oposto”.

Propriedade refletora da Elipse. Natalia Victorovna Kôrmysheva Dias Furtado, Tetyana Victorovna Kôrmysheva Mendes Gonçalves



PROPRIEDADE REFLETORA DA ELIPSE



Tema: GeoGebra como instrumento auxiliar no estudo da propriedade refletora das cónicas: caso elipse.
Tópico: Propriedade refletora das cónicas
Capacidades transversais/Competências: Análise de dados, obtidos nas experiências
Nível Ensino/Ano: Superior/1º ano

OBJECTIVOS VISADOS

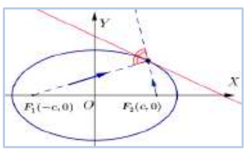
Utilizando o dinamismo e das potencialidades do Software GeoGebra no estudo da propriedade refletora das cónicas, caso da elipse, foram colocados os seguintes objetivos para os estudantes: familiarizar-se uma vez mais com o processo de investigação e da verificação de propriedades das cónicas; promover o desenvolvimento da sua abstração geométrica e do raciocínio dedutivo; expressar as suas ideias, usando notação, simbologia e vocabulário próprio.

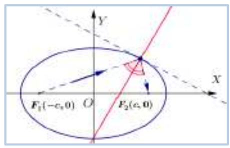
ENQUADRAMENTO CURRICULAR E PROGRAMÁTICO DA TAREFA

O estudo da propriedade refletora das cónicas enquadra-se nos conteúdos da unidade curricular de Álgebra Linear e Geometria Analítica II do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade de Cabo Verde, e pressupõe o conhecimento da representação canónica e paramétrica da elipse num referencial cartesiano bidimensional, bem como o domínio dos seguintes conceitos básicos: vértices, focos, semieixos e raios focais da elipse.

DESCRIÇÃO DA TAREFA

Antes de dar o início à atividade, foram ministradas algumas sessões de familiarização com o Software GeoGebra, visto que era o primeiro contato dos estudantes com o programa.
A tarefa em apreciação é: confirmação da segunda lei de reflexão da Ótica geométrica relativa ao espelho elíptico: todo o raio luminoso que parte de um dos focos da elipse reflete nela passando por outro foco, formulada conceptualmente na linguagem geométrica: a tangente à elipse num ponto de tangência P é a bissetriz do ângulo formado por um raio focal e a continuidade do outro raio focal, traçados nesse ponto, ou ainda: a normal à elipse traçada no ponto P é a bissetriz do ângulo formado pelos raios focais.
A atividade foi realizada em computadores pessoais de estudantes do 1º ano e estudantes voluntários dos 2º e 3º anos da Licenciatura em Matemática, conforme à ficha detalhada de trabalho.
O estudo foi concluído com a execução das experiências e análise dos resultados obtidos pela variação dos parâmetros a e b (semieixos da elipse) e amplitudes dos ângulos β, γ e δ, ε, entre os raios focais e tangente, e entre os raios focais e normal da elipse, respetivamente.

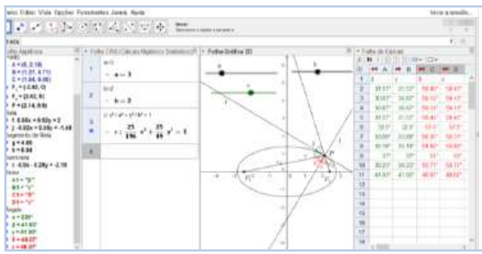




AVALIAÇÃO

Os estudantes do grupo experimental desenvolveram a primeira "experiência de ensino", focada na exploração de Folha Geométrica 2D, Folha Algébrica, Folha CAS e Folha de Cálculo do GeoGebra.
Os estudantes foram avaliados pelos resultados obtidos nas construções e experiências, segundo os seguintes parâmetros:
- interesse e empenho,
- capacidade de síntese e de análise,
- qualidade de organização e de apresentação da janela de trabalho,
- protocolo de construção.

Todos os estudantes atingiram o objetivo preconizado.



CONCLUSÕES

O uso das novas tecnologias de informação (TICs) traz contribuições significativas para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática não só ao nível Secundário, mas também, ao nível Superior. O grande benefício da utilização do Software GeoGebra consiste na criatividade e experiência profissional do docente que é capaz de enquadrar na sua pratica letiva esse instrumento de modo a criar interesse junto dos e nos estudantes, gerir com maior eficácia o tempo e melhorar, do ponto de vista da visualização, a compreensão e a interiorização dos conteúdos programáticos pelos estudantes de Licenciatura em Matemática.

Natália V. Kôrmysheva Dias Furtado
natalia.furtado@docente.unicv.edu.cv
Tetyana V. Kôrmysheva Mendes Gonçalves
tetyana.goncalves@docente.unicv.edu.cv

27 E 28 DE JULHO DE 2017
1º DIA GEOGEBRA NA UNICV
SEMINÁRIO PARA A INSTALAÇÃO DO INSTITUTO GEOGEBRA NA UNICV

www.unicv.edu.cv

Ficha de Trabalho - Elipse e propriedade refletora

Tarefa 1 — Elipse e construções auxiliares

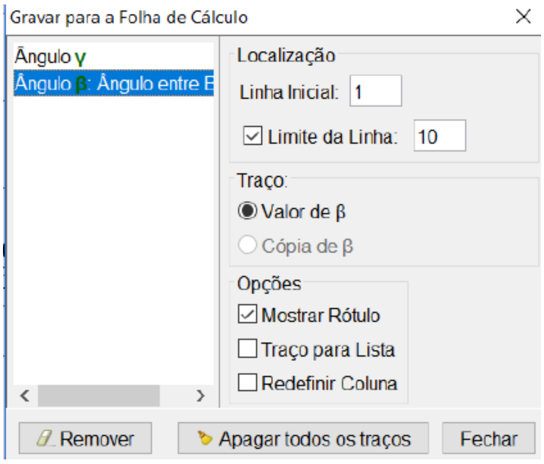
1. Abrir a janela do GeoGebra;
2. No menu *Vista* assegure-se que estão ativas a *Folha Algébrica*, , *Folha Gráfica 2D*, , *Folha de Cálculo*, ,a *Folha CAS* , , (ou utilizar o campo de entrada);
3. Na *Folha CAS* , , introduzir: $a = 3$;
4. Na *Folha Gráfica 2D*, , exibir o respetivo seletor a;
5. Na *Folha CAS*, , , introduzir: $b = 2$;
6. Na *Folha Gráfica 2D* , , exibir o respetivo seletor b;
7. Na *Folha CAS* introduzir a equação
8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, isto é, em simbolismo de GeoGebra: x^2/a^2 + y^2/b^2=1 (ocultar o rótulo c);
9. Na *Folha Gráfica 2D*, , introduzir o ângulo α, por meio da ferramenta, a=2 ;
10. No *Barra de Entrada* introduzir o ponto P da elipse de coordenadas paramétricas P=(a cosα, b sinα), ou seja $P = (a\ cos\alpha, b\ sin\alpha)$;
11. No *Barra de Entrada* introduzir: F_1= (- sqrt (a^2 - b^2),0) e F_2= (sqrt (a^2 - b^2),0);
12. Na *Folha Gráfica 2D*, , construir a reta tangente a elipse no ponto P usando a ferramenta ;

Tarefa 2 — Medição de ângulos; introdução de dados na *Folha de Cálculo*

1. Na *Folha Gráfica 2D*, , construir dois segmentos: F_1P, F_2P, por meio da a ferramenta , que podem ser renomeados por r_1 e r_2, respetivamente, utilizando opção mostrar legenda (r_1 e r_2).
2. Ainda na *Folha Gráfica 2D*, , construir:
   2.1. a semirreta F_2P por meio da ferramenta ;
   2.2. marcar dois pontos: A na reta tangente f e B na semirreta F_2P, por meio da ferramenta A de modo que o ponto A esteja no interior do ângulo F_1PB ;

2.3. medir os ângulos BPA e APF_1 por meio da ferramenta , escolher a opção *Mostrar Nome* ocultar os valores dos respetivos ângulos.

3. Na *Folha Algébrica* ou na *Folha Gráfica 2D* clicando em cima das letras gregas, escolher opção Gravar para a *Folha de Cálculo*.
4. No quadro que aparece:



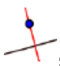
fazer as escolhas preferidas e fechar.

5. Mudando a posição do seletor:

5.1. a ,(semieixo maior da elipse), observar as respetivas alterações de valores dos ângulos β e γ na *Folha de Cálculo*;

5.2. b ,(semieixo menor da elipse), observar as respetivas alterações de valores dos ângulos β e γ na *Folha de Cálculo*.

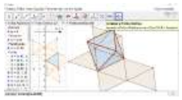
Tarefa 3 — Reta normal a elipse

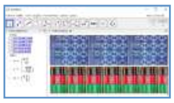
1. Na *Folha Gráfica 2D* construir uma reta normal/perpendicular a reta tangente no ponto P, por meio da ferramenta , ;
2. Na *Folha Gráfica 2D* marcar ponto C na reta normal j, no interior do ângulo F_2PF_1, por meio da ferramenta  ;
3. Na *Folha Gráfica 2D* medir os ângulos F_1PC e CPF_2 por meio da ferramenta  ;
4. Introduzir os ângulos na *Folha de Cálculo*.
5. Mudando a posição do seletor:

5.1. a, (semieixo maior da elipse), observar as respetivas alterações de valores dos ângulos δ e ε na *Folha de Cálculo*;

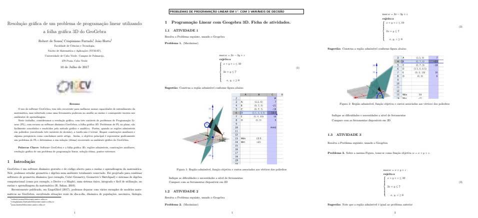
5.2. b (semieixo menor da elipse), observar as respetivas alterações de valores dos ângulos δ e ε na *Folha de Cálculo*.

Resolução Gráfica de um problema de programação linear utilizando a folha gráfica 3D do GeoGebra. Robert de Sousa, João Carlos Horta e Crispiniano Furtado





RESOLUÇÃO GRÁFICA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR UTILIZANDO A FOLHA GRÁFICA 3D DO GEOGEBRA



Tema: **Programação Linear (PL) envolvendo 3 variáveis de decisão**
Tópico: **Resolução Geométrica de problemas de PL**
Capacidades Transversais: **Visualização de regiões no espaço**
Nível de Ensino: **Secundário — Universitário**

OBJETIVOS VISADOS

Estudar a folha gráfica 3D do GeoGebra para resolução de um problema de Programação Linear (PL) com três variáveis de decisão; fazer uma avaliação diagnóstica e formativa dos participantes (alunos do 2.º ano da Licenciatura em Estatística e Gestão de Informação (EGI)) no processo de resolução de um PL usando a Folha Gráfica 3D.

ENQUADRAMENTO CURRICULAR E PROGRAMÁTICO DA TAREFA

Um problema de PL no plano $\mathbb{R}^2$, com duas variáveis de decisão, não é de difícil conceção e resolução Geométrica usando a folha gráfica 2D do GeoGebra. Problemas de PL são muito úteis e as resoluções envolvem a Álgebra e a Geometria.
O GeoGebra (na sua versão 5) dispõe também de uma folha gráfica 3D. Este trabalho enquadra-se no contexto da resolução Geométrica de Problemas de PL.

DESCRIÇÃO DA TAREFA

A tarefa que se propôs envolveu a resolução de problemas de PL, com três variáveis de decisão, usando a folha gráfica 3D. Sabendo que os alunos participantes do estudo sabem resolver o problema para o caso de duas variáveis de decisão, usando o GeoGebra, procurou-se analisar o caso de três variáveis de decisão, usando a folha gráfica 3D.

As tarefas consistiam-se em construções geométricas de regiões e procura de soluções conforme uma ficha Formativa. Tudo é sustentado pelo teorema seguinte.

Teorema Seja M o conjunto admissível de um problema de programação linear.
- Se M é não vazio e limitado, então a solução ótima existe e ocorre num ponto extremo;
- Se M é não vazio e ilimitado, então se existe solução ótima para um problema de PL, este ocorre num ponto extremo;
- Se não existe solução ótima para um PL, então M é vazio ou é ilimitado.

Figura 7: ·

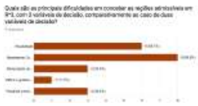


Figura 8: ·

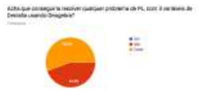


Figura 9: ·

11

AVALIAÇÃO

Optou-se por uma avaliação diagnóstica e formativa. Por um lado, pretendeu-se avaliar as dificuldades. Por outro, pretendeu-se expor/partilhar uma estratégia (estudada no artigo) para a resolução dos problemas de PL usando a folha Gráfica 3D (métodos auxiliares).

No fim, os participantes responderam um pequeno inquérito. Os resultados, estão sumariados nas Figuras (7-9) — do inquérito.

CONCLUSÕES

Este estudo teve como objetivo fundamental a exploração da folha gráfica 3D e uma avaliação diagnóstica e formativa a um grupo de estudantes. Para tal, forneceu subsídios para os processos subjacentes na resolução de problemas de PL. Fez-se uma avaliação no sentido de analisar a adequação da folha gráfica 3D para o tratamento de tais conteúdos.

Num computo geral, os resultados alcançados foram satisfatórios na medida em que se mostrou que um problema de PL, com 3 variáveis de decisão, pode ser resolvido usando a folha gráfica 3D.

Apesar das dificuldades técnicas na resolução, pois requer procedimentos auxiliares e maturidade do utilizador, os estudantes participantes reconhecem que de poderá ser útil na resolução de problemas de PL. Pode ser uma mais valia para a prática pedagógica.

Como trabalho futuro, propõe-se estudar outras estratégias e alargar a experiência para outros contextos didáticos.

Sousa, R. robert.sousa@docente.unicv.edu.cv
Horta, J. joao.horta@docente.unicv.edu.cv
Furtado, C. crispiniano.furtado@docente.unicv.edu.cv

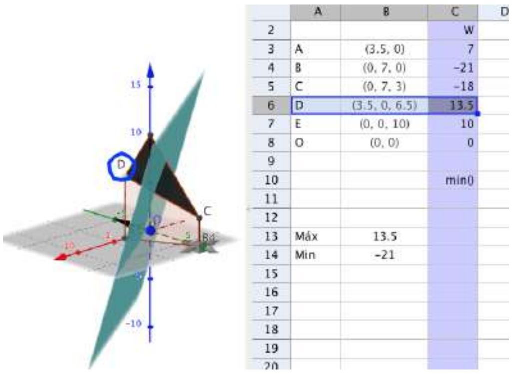
27 E 28 DE JULHO DE 2017
1º DIA GEOGEBRA NA UNICV
SEMINÁRIO PARA A INSTALAÇÃO DO INSTITUTO GEOGEBRA NA UNICV

www.unicv.edu.cv

Ficha de Trabalho - Programação Linear com GeoGebra 3D

Resolva os problemas seguinte, usando o GeoGebra. En cada caso, indique as dificuldades e necessidades a nível de ferramentas. Compare com as ferramentas disponíveis em 2D

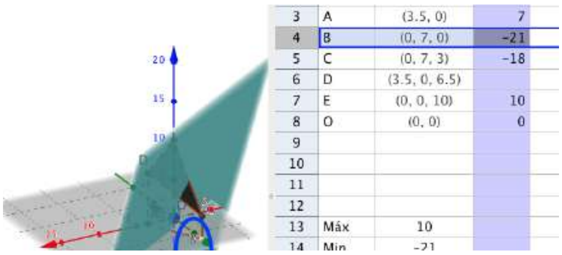
Problema 1: Maximizar w = 2x – 3y + z sujeito a x+y+z≤10 , 2 x + y ≤ 7 e x, y, z ≥ 0 .
Sugestão: Construa a região admissível conforme figura abaixo



	A	B	C	D
2			W	
3	A	(3.5, 0)	7	
4	B	(0, 7, 0)	-21	
5	C	(0, 7, 3)	-18	
6	D	(3.5, 0, 6.5)	13.5	
7	E	(0, 0, 10)	10	
8	O	(0, 0)	0	
9				
10			min()	
11				
12				
13	Máx	13.5		
14	Min	-21		
15				
16				
17				
18				
19				
20				

Figura 1: Região admissível, função objetivo e custos associados aos vértices dos poliedros

Problema 2: Maximizar w = 2x – 3y + z sujeito a x+y+z≤10, 2 x + y ≤ 7 e x, y, z ≥ 0
Sugestão: Construa a região admissível conforme figura abaixo



3	A	(3.5, 0)	7
4	B	(0, 7, 0)	-21
5	C	(0, 7, 3)	-18
6	D	(3.5, 0, 6.5)	
7	E	(0, 0, 10)	10
8	O	(0, 0)	0
9			
10			
11			
12			
13	Máx	10	
14	Min	-21	

Figura 2: Região admissível, função objetiva e custos associados aos vértices dos poliedros

Problema 3: Sobre a mesma Figura, tome-se como função objetiva w = x + y + z. Maximize w sujeito a x+y+z≤10, 2x + y ≤ 7 e x, y, z ≥ 0.
Sugestão: Note que a região admissível é igual ao problema anterior.

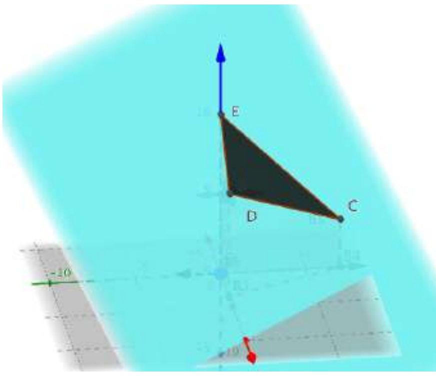
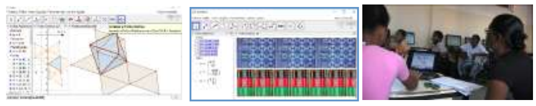


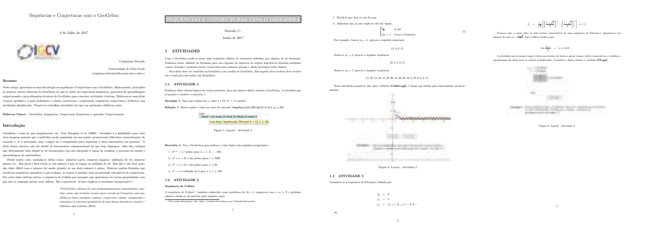
Figura 3: Região admissível, função objetiva e custos associados aos vértices dos poliedros

As 'curvas' de níveis serão paralelas a face {C,D,E}. Conclua que qualquer ponto sobre a face {C,D,E} maximiza w.

Sequências e Conjecturas com o GeoGebra. Crispiniano Furtado



SEQUÊNCIAS E CONJECTURAS COM O GEOGEBRA



Tema: Sequências e Conjecturas com o GeoGebra
Tópico: Sequências e conjeturas
Capacidades Transversais: Sucessões e proposições
Nível de Ensino: Secundário — Universitário

OBJETIVOS VISADOS

Desenvolver atividades, de forma "automatizada", para o estudo de algumas sequências e conjeturas numéricas.

ENQUADRAMENTO CURRICULAR E PROGRAMÁTICO DA TAREFA

As tarefas propostas enquadram-se no estudo de tópicos de teoria dos números e matemática discreta.

DESCRIÇÃO DA TAREFA

Na primeira atividade propôs-se estudar sequências e conjeturas usando o GeoGebra. Usou-se a combinação de funções existentes no Geogebra para gerar e validar (ou refutar) algumas asserções numéricas.

Na segunda atividade propôs-se explorar a conjetura de Collatz.

Na terceira atividade propôs verificar a relação entre a sequência de Fibonacci e o número de ouro.

As atividades foram concebidas de forma a evitar (ou minimizar) procedimentos auxiliares por parte do utilizador e focar nos resultados visuais de certas propriedades de forma dinâmica.

AVALIAÇÃO

Foi aplicado uma ficha formativa. Depois de resolver a ficha, cada participante preencheu um pequeno inquérito visando a recolha de subsídios tendo em conta a adequação das atividades propostas. Os resultados, estão sumariados nas Figuras (1-6) — do inquérito.

CONCLUSÕES

No trabalho recaiu-se sobre alguns elementos da teoria dos números e matemática discreta. Mostrou-se alguns exemplos onde se testa a validade de algumas fórmulas para um conjunto (finito!) de números usando o GeoGebra.

Além de validar (ou refutar) asserções numéricas pode-se também compreender uma conjetura ou ainda entender/intuir sobre o conceito do limite de uma sequência, etc, usando o GeoGebra.

É possível programar no GeoGebra. Essa vantagem permite economizar algumas tarefas e torna mais eficientes determinadas tarefas de investigação.

Os resultados do inquérito sugerem que atividades do tipo podem contribuir para melhoria da aprendizagem dos tópicos tratados.

Furtado, C.
crispiniano.furtado@docente.unicv.edu.cv

27 E 28 DE JULHO DE 2017
1º DIA GEOGEBRA NA UNICV
SEMINÁRIO PARA A INSTALAÇÃO DO INSTITUTO GEOGEBRA NA UNICV

Ficha de Trabalho - Sequências e Conjeturas com o GeoGebra

Com o GeoGebra pode-se gerar uma sequência (finita) de elementos definidos por alguma lei de formação. Podemos testar validade de fórmulas para um conjunto de números ou refutar hipotéticas fórmulas mediante contra exemplo e podemos testar conjecturas para números grande e ainda investigar sobre limites.

Tarefa 1

Podemos obter valores lógicos de certas asserções, para um número finito, usando o GeoGebra. A atividade que se propõe é resolver o exercício 1.

Exemplo 1. Para que valores de n, entre 1 e 50, $2^n + 1$ é primo?

Solução 1. Basta copiar e colar na caixa de entrada: Sequência[{n,ÉPrimo[2^n+1]},n,1,50]

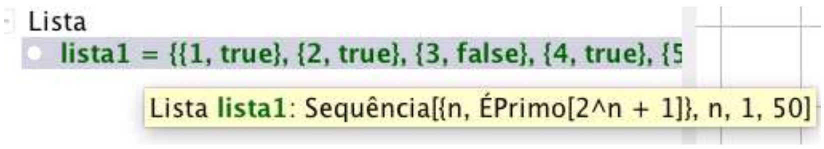


Figura 1: Layout - Tarefa 1

Exercício 1. Use o GeoGebra para indicar o valor lógico das seguintes proposições.

1. $2^{n+1}-1$ é primo para n=1,2,…,100.
2. n^2+n+41 é um primo para $n \leq 1000$.
3. n^2-n+41é um primo para $n \leq 80$.
4. n^3-n é múltiplo de 3 para $1 \leq n \leq 100$.

Tarefa 2 - Sequência de Collatz

A sequência de Collatz, também conhecida como problema de 3n + 1 começa-se com o $n_0 \in \mathbb{N}$, o próximo número obtém-se do anterior pela seguinte regra:

1. Dividi-lo por dois se este for par
2. Adicionar um, ao seu triplo se este for impar, $\begin{cases} \frac{n_i}{2} & \text{caso} \quad n_i \text{ par} \\ 3n_i + 1 & \text{caso} \quad n_i \text{ ímpar} \end{cases}$

- Por exemplo, tom-se $n_0 = 1$, gera-se a seguinte sequência {1, 4, 2, 1}.
- Tome-se $n_0 = 2$, gera-se a seguinte sequência {2,1,4,2,1}.
- Tome-se $n_0 = 7$, gera-se a seguinte sequência {7,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1}.

Nesta tarefa propõe-se que abra o ficheiro Collatz.ggb e clique nos botões para incrementar ou decrementar.

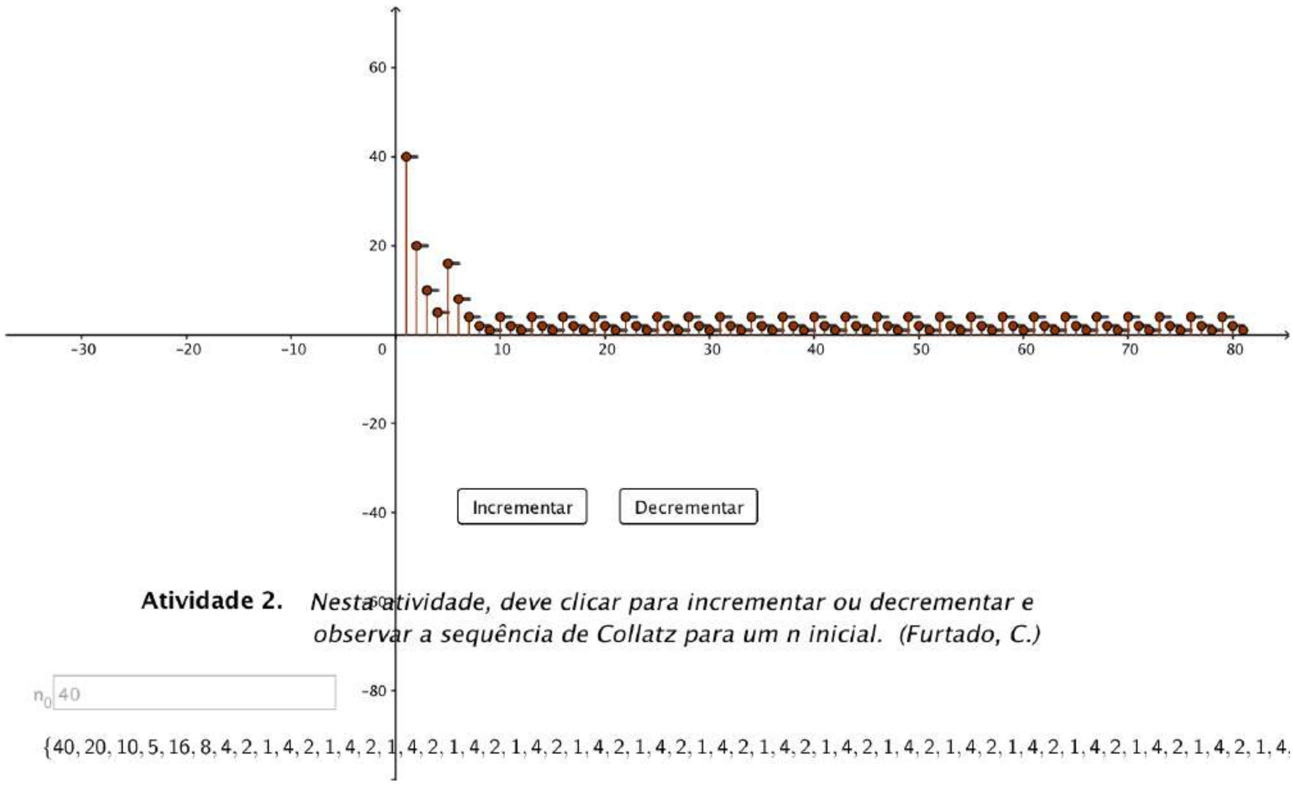


Figura 2: Layout - Tarefa 2 (https://www.geogebra.org/m/h5z2ScF4)

Tarefa 3 - Sequência de Fibonacci

Considere-se a sequência de Fibonacci definida por

$f_0 = 0$

$f_1 = 1$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n = 2,3,...$ ou $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], n \geq 1.$

Prova-se que a razão entre os dois termos consecutivos de uma sequência de Fibonacci, aproxima-se do número de ouro $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Não é difícil verificar que $\lim \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi$.

A tarefa que se propõe aqui é com ajuda do GeoGebra gerar termos (dois) consecutivos e verificar a aproximação da razão para os valores considerados. Pode usar a informação acima e as potencialidades do GeoGebra, nomeadamente o CAS.

Publicações

Após o seminário final realizado em julho de 2017, as experiências de ensino desenvolvidas durante o programa de formação forma publicadas na Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657. Os trabalhos passaram a integrar o v. 7, n. 1 e n. 2, de 2018, e v. 7, n. 1, de 2019, da revista, na modalidade de Artigos e Relatos de Experiência. O editorial do número especial foi escrito pela editora executiva da revista, Doutora Celina Abar, e a apresentação esteve a cargo do Doutor Juan Carlos Toscano Grimaldi. Os artigos correspondem as versões detalhadas dos posters exibidos na secção anterior que posteriormente serão apresentados a lista dos trabalhos publicados com os respectivos links de acesso aberto ao conteúdo dessas publicações.

Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657, V7 n. 1 (2018)

Editorial Número Especial
Celina A. A. Pereira Abar
Apresentação de Número Especial
Juan Carlos Toscano Grimaldi
Artigos

O GeoGebra como ferramenta de apoio para aprendizagem significativa da Geometria
Astrigilda Pires Rocha Silveira
A projeção estereográfica no GeoGebra
José Manuel Dos Santos Dos Santos, Ana Maria D'Azevedo Breda
Primeiras aprendizagens matemáticas com o Geogebra
Dárida Maria Fernandes
Demonstração da propriedade dos ângulos inscrito e central com auxílio do GeoGebra
Natalia Victorovna Kôrmysheva Dias Furtado, Isabel Sónia Martins Andrade
GeoGebra como instrumento auxiliar no estudo da propriedade refletora das cónicas: caso elipse.

Natalia Victorovna Kôrmysheva Dias Furtado, Tetyana Victorovna Kôrmysheva Mendes Gonçalves

Relatos de Experiência

Sólidos geométricos: área e volume de sólidos geométricos

Reinaldo Fortes Rocha, Sueli Cilene Pires Rocha

Funções reais de variável real: Estudo de funções afim e quadrática

Sidnei Ramos Da Cruz, Paula Sousa Cruz, Jorge Duarte

Estudo da monotonia de funções reais de variável real com recurso ao GeoGebra.

José Mendes da Costa

Estudo da Trigonometria no 11º Ano Com Recurso ao Software Geogebra

Crisolita Sousa de Brito, Dirce Henriques da Luz, João Emanuel Almeida Duarte

Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657, V7 n. 2 (2018)

Artigos

Resolução gráfica de um problema de programação linear utilizando a folha gráfica 3D do GeoGebra

Robert Sousa Sousa, Crispiniano Jesus Furtado, João Carlos Horta

Relatos de Experiência

Sequências e Conjecturas com o GeoGebra

Crispiniano de Jesus Gomes Furtado

Ângulos inscritos com recurso ao GeoGebra

João Dantas Gomes Vaz

GeoGebra no Estudo da Geometria no 2º ano do 2º ciclo do Ensino Básico de Escolaridade

José Pedro Almeida Ganeto, Maria São da Conceição Costa Sousa, Maria João Silva Gonçalves, Samira Sams Santos Duarte

Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657, V8 n. 1 (2019)

Relatos de Experiência

Funções de duas variáveis, representação gráfica e integração

João Manuel Fortes Cruz

Notas bibliográficas

Na secção de “Referencias gerais” apresentam-se alguns textos onde se podem encontrar as citações realizadas ou servir para aprofundamento dos assuntos aqui tratados. Nota-se que para além do Programa de Matemática de 2007 de Portugal foram considerados os documentos do programa e do currículo de Matemática de Cabo Verde.

Em relação às tarefas apresentadas são parte ou adaptações dos documentos referidos na secção “Referencias das tarefas”. Estes constituem bons guias para quem pretender trabalhar com o GeoGebra. A maioria está disponível em várias das secções de http://www.geogebra.org.pt/ .

Referencias gerais

Breda, A. M. D. A., & Dos Santos, J. M. D. S. (2016). Complex functions with GeoGebra. Teaching Mathematics and its Applications, 35(2), 102-110. ISSN 1471-6976.

Breda, A., & Dos Santos, J. (2015 a). The Riemann Sphere in GeoGebra. Sensos-e, 2(1). ISSN 2183-1432. Disponível em: http://sensos-e.ese.ipp.pt/?p=7997. Acedido em 15/02/2015.

Breda, A., Trocado, A., & Dos Santos, J. M. D. S.(2013) O GeoGebra para além da segunda dimensão. Indagatio Didactica, Portugal, 5, jul. 2013. ISSN: 1647-3582. Disponível em: http://revistas.ua.pt/index.php/ID/article/view/2421/2292 . Acedido em 15/11/2016.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011) Geometria e Medida no Ensino Básico. Brochura de apoio ao Programa do Ensino Básico (2007) para o ensino da Geometria e Medida. Lisboa: Direção geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Dos Santos, J. M. D. S., & Trocado, A. E. B. (2016). GeoGebra as a Learning Mathematical Environment. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657, 5(1), 05-22. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/26795/19963 . Acedido em 15/11/2016.

DOS SANTOS, J. PERES, M. (2012). Atitudes dos alunos face ao GeoGebra – Construção e validação de um inventário In Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, v. 1, n. 1, 161 – 172. ISSN 2237-9657. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/download/8874/6597 . Acedido em 23-01-2013.

Dos Santos, J. Viera, M. (2006) Geometria: Conceitos e experiências de aprendizagem. In Fernandes, D.(org.) Cadernos Temáticos. ESE-IP Porto.

Ministério da Educação (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação. Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. (PMEB2007)

Referencias das tarefas de formação

Azevedo, A. Dos Santos, J. Correia, P. (2011) O GeoGebra no desenvolvimento dos temas da Álgebra e da Geometria no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, tarefas para a sala de aula e conhecimento do software necessário à ação do professor. Curso n.3, ProfMat 2011. Lisboa.

Azevedo, A. Dos Santos, J. Correia, P. (2011) O GeoGebra no desenvolvimento dos temas e competências matemáticas no 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico, tarefas para a sala de aula e conhecimento do software imprescindível à ação do professor. Curso n.4 , ProfMat 2011. Lisboa.

Dos Santos, J. Geraldes, J. Ribeiro, A. Trocado, A. (2010) Como usar o GeoGebra para ensinar e aprender Matemática. Curso n.3 , ProfMat 2010. Aveiro.

Dos Santos, J. Geraldes, J. Ribeiro, A. Trocado, A. (2009) Como usar o GeoGebra para ensinar e aprender Matemática. Curso n.3 , ProfMat 2009. Viana do Castelo.

Dos Santos, J. Trocado, A. (2008) Estudo de isometrias com o GeoGebra como abordagem possível para o 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico no contexto do reajustamento do Programa de Matemática do Ensino Básico . Sessão Pratica, MinhoMat 2008. Vila Verde.

Junho 2020

ISBN: 978-989-54789-0-3